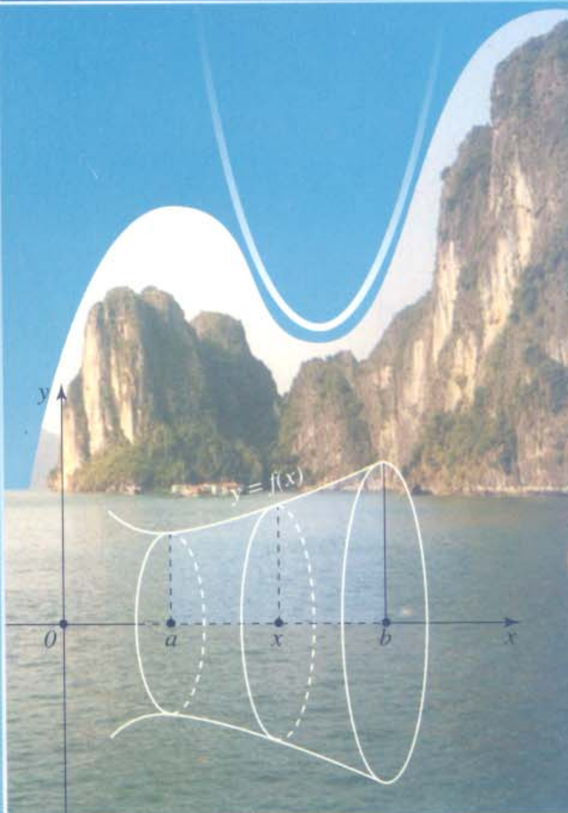
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

GIẢI TÍCH 12

NÂNG CAO





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐOÀN QUỲNH (Tổng Chủ biên) - NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên)
TRẦN PHƯƠNG DUNG - NGUYỄN XUÂN LIÊM - ĐẶNG HÙNG THẮNG

GIẢI TÍCH 12

NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

KÍ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH :

Hn Câu hỏi hoặc hoạt động thứ n trong bài học.

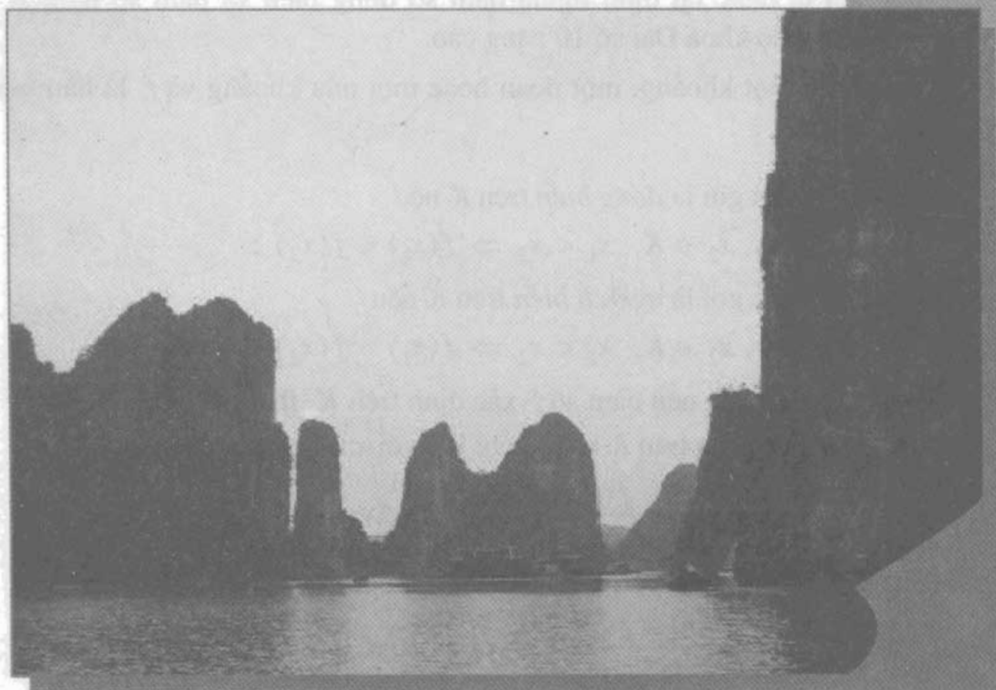
□ Kết thúc chứng minh một định lí, hệ quả, ví dụ.

01–2010/CXB/758–1485/GD

Mã số : NH201T0

Chương I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



Trong chương này, chúng ta **ứng dụng đạo hàm** và giới hạn để xét một số tính chất quan trọng của hàm số và đồ thị như : tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị ; từ đó khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Học sinh cần có kĩ năng thành thạo khi xét các tính chất đã nêu của một hàm số cho trước cũng như khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm số đơn giản.

§ 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Trong bài này ta sẽ ứng dụng đạo hàm để xét tính *đơn điệu* (tức là tính *đồng biến* và tính *nghịch biến*) của hàm số.

Trước hết ta nhắc lại định nghĩa hàm số đồng biến và hàm số nghịch biến trong sách giáo khoa Đại số 10 nâng cao.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và f là hàm số xác định trên K.

Hàm số f được gọi là *đồng biến* trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ ;$$

Hàm số f được gọi là *nghịch biến* trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Nói một cách khác, nếu hàm số f xác định trên K thì

Hàm số f đồng biến trên K khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc K, ta có

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \text{ với mọi } \Delta x \neq 0 \text{ mà } x + \Delta x \in K.$$

Hàm số f nghịch biến trên K khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc K, ta có

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0 \text{ với mọi } \Delta x \neq 0 \text{ mà } x + \Delta x \in K.$$

Từ đó, người ta chứng minh được điều sau đây :

> Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.
>
> a) Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.
>
> b) Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

Đảo lại, có thể chứng minh được :

ĐỊNH LÍ

> Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.
>
> a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I.
> b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I.
> c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I.

Định lí trên cho ta một điều kiện đủ để hàm số đơn điệu trên một khoảng.

CHÚ Ý

Khoảng I trong định lí trên có thể được thay bởi một đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải bổ sung giả thiết "Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn :

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a\ ;\ b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a\ ;\ b]$.

Người ta thường diễn đạt khẳng định này qua bảng biến thiên như sau :

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ nghịch biến trên đoạn $[0\ ;\ 1]$.

Giải

Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0\ ;\ 1]$. Ngoài ra, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} < 0$ với mọi $x \in (0\ ;\ 1)$. Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[0\ ;\ 1]$. □

• Việc tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của một hàm số còn được nói gọn là xét *chiều biến thiên của hàm số* đó.

Qua định lí đã nêu, ta thấy việc xét chiều biến thiên của một hàm số có đạo hàm có thể chuyển về việc xét dấu đạo hàm của nó.

Ví dụ 2. Xét chiều biến thiên của hàm số

$$y = x + \frac{4}{x}.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Chiều biến thiên của hàm số được nêu trong bảng sau :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	-4	↘	‖	↘	4	↗	

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2 ; 0)$ và $(0 ; 2)$.

H1 *Xét chiều biến thiên của hàm số*

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3.$$

Ví dụ 3. Xét chiều biến thiên của hàm số

$$y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

$y' = 0$ với $x = \frac{1}{2}$ và $y' > 0$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	↗		$-\frac{17}{6}$	↗	

Theo chú ý sau định lí, hàm số đã cho đồng biến trên mỗi nửa khoảng $\left(-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ và $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right)$. Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét. Qua ví dụ 3, ta thấy có thể mở rộng định lí đã nêu như sau :

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$ (hoặc $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I.

H2 *Xét chiều biến thiên của hàm số*

$$y = 2x^5 + 5x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3}.$$

Câu hỏi và bài tập

1. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau :

a) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$;

b) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$;

c) $y = x + \frac{3}{x}$;

d) $y = x - \frac{2}{x}$;

e) $y = x^4 - 2x^2 - 5$;

f) $y = \sqrt{4 - x^2}$.

2. Chứng minh rằng

a) Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó ;

b) Hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

3. Chứng minh rằng các hàm số sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$; b) $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$.

4. Với giá trị nào của a hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

5. Tìm các giá trị của tham số a để hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Luyện tập

6. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$; b) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$;

c) $y = \frac{x^2 - 8x + 9}{x - 5}$; d) $y = \sqrt{2x - x^2}$;

e) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$; f) $y = \frac{1}{x + 1} - 2x$.

7. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \cos 2x - 2x + 3$$

nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

8. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\sin x < x$ với mọi $x > 0$,

$\sin x > x$ với mọi $x < 0$;

Hướng dẫn. Chứng minh hàm số $f(x) = x - \sin x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \neq 0$;

c) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ với mọi $x > 0$,

$\sin x < x - \frac{x^3}{6}$ với mọi $x < 0$.

9. Chứng minh rằng

$$\sin x + \tan x > 2x \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right).$$

Hướng dẫn

Chứng minh hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5},$$

($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 và năm 1995.

b) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$. Tìm f' và xét chiều biến thiên của hàm số f trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$.

c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/ năm).

- Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 và năm 2008 của thị trấn.
- Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người / năm ?

§ 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài này giới thiệu khái niệm cực đại, cực tiểu của hàm số và xét quan hệ giữa cực đại, cực tiểu với dấu của đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số.

1. Khái niệm cực trị của hàm số

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in \mathcal{D}$.

a) x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a ; b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a ; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

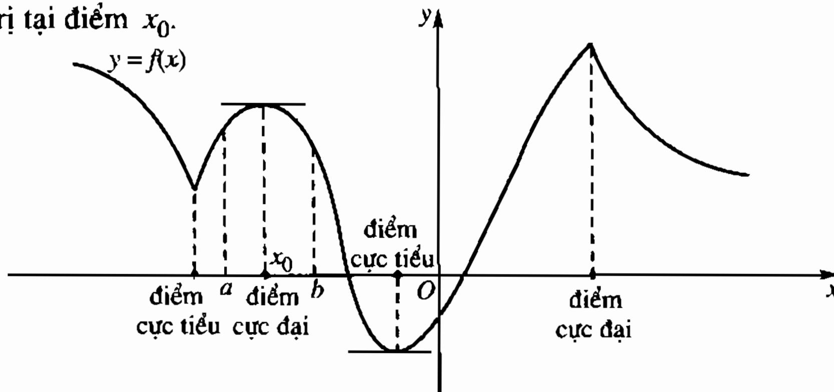
b) x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a ; b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a ; b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0.



Hình 1.1

CHÚ Ý

1) Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a ; b)$ nào đó chứa điểm x_0.

2) Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp $\mathcal{D}$. Trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trong hình 1.1, ta thấy hàm số có hai điểm cực tiểu và hai điểm cực đại. Hàm số cũng có thể không có cực trị trên một tập hợp số thực cho trước.

3) Đôi khi người ta cũng nói đến điểm cực trị của đồ thị.

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0 ; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực trị của đồ thị* hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (h.1.1), ta thấy nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và nếu đồ thị của hàm số có tiếp tuyến tại điểm $(x_0 ; f(x_0))$ thì tiếp tuyến đó song song với trục hoành, tức là $f'(x_0) = 0$.

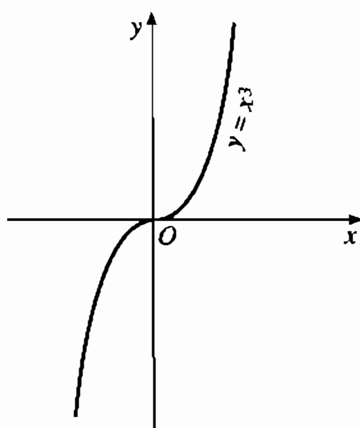
Đó là nội dung của định lí mà ta thừa nhận sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

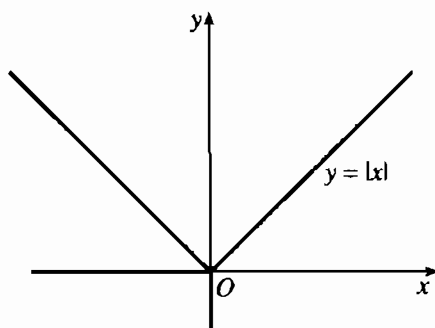
Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Điều ngược lại có thể không đúng. Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.

Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = x^3$, ta có $f'(x) = 3x^2$ và $f'(0) = 0$. Tuy nhiên, hàm số f không đạt cực trị tại điểm $x = 0$. Thật vậy, vì $f'(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$ (h.1.2).



Hình 1.2



Hình 1.3

CHÚ Ý

Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Chẳng hạn, hàm số $y = f(x) = |x|$ xác định trên $\mathbb{R}$. Vì $f(0) = 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Dễ thấy hàm số $y = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ (h.1.3).

Như vậy, một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí sau cho ta một điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị.

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a ; x_0)$ và $(x_0 ; b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a ; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0 ; b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a ; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0 ; b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Nói một cách khác,

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

Chứng minh

a) Vì hàm số f liên tục trên nửa khoảng $(a\ ;\ x_0]$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a\ ;\ x_0)$ nên hàm số f nghịch biến trên $(a\ ;\ x_0]$. Do đó

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a\ ;\ x_0).$$

Tương tự, vì hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[x_0\ ;\ b)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0\ ;\ b)$ nên hàm số đồng biến trên $[x_0\ ;\ b)$. Do đó

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (x_0\ ;\ b).$$

Vậy $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$, tức là hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Phần b) được chứng minh tương tự. □

Định lí 2 được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau :

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$ (cực tiểu)	↗	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$ (cực đại)	↘	

Từ định lí 2 ta có quy tắc tìm cực trị sau đây.

QUY TẮC 1

1. Tìm $f'(x)$.

2. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2,...)$ tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\quad f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

Từ đó $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Sau đây là bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	3	↘	$-7\frac{2}{3}$	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, giá trị cực đại của hàm số là $f(-1) = 3$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$, giá trị cực tiểu của hàm số là $f(3) = -7\frac{2}{3}$.

H1 *Tìm cực trị của hàm số*

$$f(x) = x + \frac{4}{x} - 3.$$

Ví dụ 2. Áp dụng quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = |x|.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $$f(x) = \begin{cases} -x \text{ với } x < 0 \\ x \text{ với } x \geq 0. \end{cases}$$

Do đó $$f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ với } x < 0 \\ 1 \text{ với } x > 0. \end{cases}$$

(Hàm số f không có đạo hàm tại điểm $x = 0$).

Sau đây là bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và giá trị cực tiểu của hàm số là $f(0) = 0$. □

Có thể sử dụng đạo hàm cấp hai để tìm cực trị của hàm số. Người ta đã chứng minh định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 3

> Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a\,;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.
>
> a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.
>
> b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Từ định lí 3, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số (nếu hàm số có đạo hàm cấp hai).

QUY TẮC 2

1. Tìm $f'(x)$.

2. Tìm các nghiệm x_i $(i = 1, 2,...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

3. Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Ví dụ 3. Áp dụng quy tắc 2 tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$;

$f''(x) = 2x - 2.$

Vì $f''(-1) = -4 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, $f(-1) = 3$.

Vì $f''(3) = 4 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$, $f(3) = -7\frac{2}{3}$.

Ta nhận được các kết quả đã biết trong ví dụ 1.

H2 *Tìm cực trị của hàm số*

$$f(x) = 2\sin 2x - 3.$$

Câu hỏi và bài tập

11. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$;

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

d) $f(x) = |x|(x + 2)$;

e) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 2$;

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

12. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x\sqrt{4 - x^2}$;

b) $y = \sqrt{8 - x^2}$;

c) $y = x - \sin 2x + 2$;

d) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

13. Tìm các hệ số a, b, c, d của hàm số

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$.

14. Xác định các hệ số a, b, c sao cho hàm số

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1 ; 0)$.

15. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, hàm số

$$y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$$

luôn có cực đại và cực tiểu.

§ 3 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Nhiều bài toán dẫn đến việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực cho trước. Trong bài này ta sẽ ứng dụng tính đơn điệu và cực trị của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$).

a) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}$$

thì số $M = f(x_0)$ được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số f trên $\mathcal{D}$, kí hiệu là $M = \max\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

b) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}$$

thì số $m = f(x_0)$ được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số f trên $\mathcal{D}$, kí hiệu là $m = \min\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

Như vậy, muốn chứng tỏ rằng số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$ cần chỉ rõ :

a) $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq m$) với mọi $x \in \mathcal{D}$.

b) Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số f (mà không nói "trên tập $\mathcal{D}$") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của f trên tập xác định của nó.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Giải

Tập xác định của hàm số là $[-2 ; 2]$. Hiển nhiên $0 \leq f(x) \leq 2$ với mọi $x \in [-2 ; 2]$;

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ và } f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0.$$

Do đó

$$\min_{x \in [-2\,;\,2]} \sqrt{4 - x^2} = 0\ ; \qquad \max_{x \in [-2\,;\,2]} \sqrt{4 - x^2} = 2. \qquad \square$$

Phương pháp thường được sử dụng để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp là lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x^3 - 3x + 3 \text{ trên đoạn } \left[-3\,;\,\frac{3}{2}\right].$$

Giải. Ta có

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)\ ;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Sau đây là bảng biến thiên của f trên đoạn $\left[-3\,;\,\frac{3}{2}\right]$:

x	-3		-1		1		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	↗	5	↘	1	↗	$\frac{15}{8}$

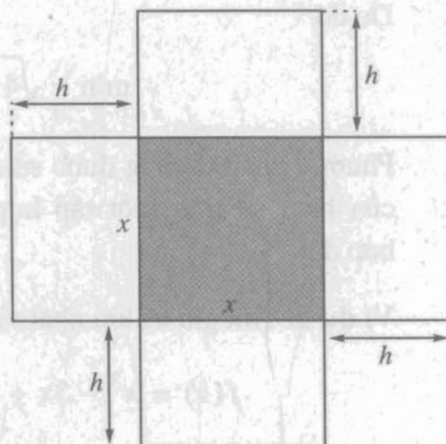
Từ bảng biến thiên, ta được

$$\max_{x \in \left[-3\,;\,\frac{3}{2}\right]} f(x) = f(-1) = 5\ ; \qquad \min_{x \in \left[-3\,;\,\frac{3}{2}\right]} f(x) = f(-3) = -15.$$

H *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = x + \frac{1}{x - 1} \text{ trên khoảng } (1\,;\,+\infty).$$

Ví dụ 3. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu hình 1.4. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao là h (cm) và có thể tích là 500 cm^3.



Hình 1.4

a) Hãy biểu diễn h theo x.

b) Tìm diện tích $S(x)$ của mảnh các tông theo x.

c) Tìm giá trị của x sao cho $S(x)$ nhỏ nhất.

Giải

a) Thể tích của hộp là

$$V = x^2h = 500 \text{ (cm}^3\text{). Do đó } h = \frac{500}{x^2},\ x > 0.$$

b) Diện tích của mảnh các tông dùng làm hộp là

$$S(x) = x^2 + 4hx.$$

Từ a) ta có

$$S(x) = x^2 + \frac{2000}{x},\ x > 0.$$

c) Ta tìm $x > 0$ sao cho tại đó $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0 ; +\infty)$. Ta có

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2};$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Bảng biến thiên của S trên khoảng $(0 ; +\infty)$:

x	0		10		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	↘		300	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0\ ;+\infty)$, hàm số S đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = 10$. Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là $x = 10$ (cm). □

Nhận xét

Người ta đã chứng minh được rằng hàm số liên tục trên một đoạn thì đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn đó.

Trong nhiều trường hợp, có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn mà không cần lập bảng biến thiên của nó.

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a\ ;b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a\ ;b]$ như sau :

QUY TẮC

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_m$ thuộc $(a\ ;b)$ tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

2. Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m), f(a)$ và $f(b)$.

3. So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của f trên đoạn $[a\ ;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của f trên đoạn $[a\ ;b]$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $[0\ ;2]$.

Giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$;

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1\ ;$$

$$f(1) = 1\ ;\ f(0) = 3\ ;\ f(2) = 5.$$

Do đó $\max\limits_{x \in [0;2]} f(x) = 5$ và $\min\limits_{x \in [0;2]} f(x) = 1$.

Câu hỏi và bài tập

16. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = x^2 + 2x - 5$ trên đoạn $[-2 ; 3]$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4 ; 0]$;

c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$;

d) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ trên đoạn $[2 ; 4]$;

e) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên đoạn $[0 ; 1]$;

f) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0 ; 2]$.

18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$; b) $y = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$.

19. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

20. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng : Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng

$$P(n) = 480 - 20n \text{ (gam)}.$$

Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất ?

Luyện tập

21. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;   b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x + 1}$;

c) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$;   d) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

22. Tìm giá trị của m để hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$$

có cực đại và cực tiểu.

23. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức

$$G(x) = 0{,}025x^2(30 - x),$$

trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất và tính độ giảm đó.

24. Cho parabol $(\mathcal{P})$: $y = x^2$ và điểm $A(-3 ; 0)$. Xác định điểm M thuộc parabol $(\mathcal{P})$ sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất và tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

25. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300km. Vận tốc dòng nước là 6km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức

$$E(v) = cv^3t,$$

trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

26. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là

$$f(t) = 45t^2 - t^3,\ t = 0, 1, 2, ..., 25.$$

Nếu coi f là hàm số xác định trên đoạn $[0 ; 25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t.

a) Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 5.

b) Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất và tính tốc độ đó.

c) Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 600.

d) Xét chiều biến thiên của hàm số f trên đoạn [0 ; 25].

27. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ trên đoạn $[-3 ; 1]$;

b) $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$;

c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$;

d) $f(x) = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

28. Trong các hình chữ nhật có chu vi là 40 cm, hãy xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

§ 4 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

Ta nhắc lại định nghĩa đồ thị của hàm số trong sách giáo khoa Đại số 10 nâng cao.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $(x ; f(x))$, $x \in \mathscr{D}$ của mặt phẳng toạ độ.

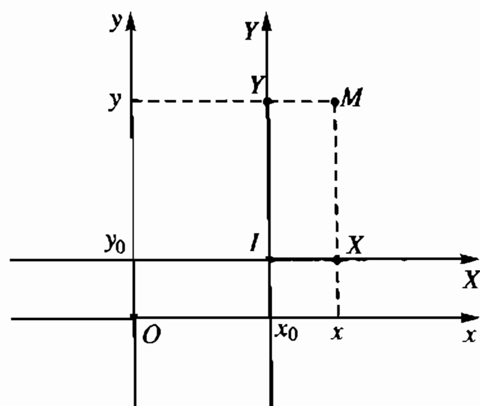
Người ta còn gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường cong có phương trình là $y = f(x)$ (gọi tắt là đường cong $y = f(x)$).

Trong nhiều trường hợp việc thay hệ toạ độ đã có bởi một hệ toạ độ mới giúp ta nghiên cứu đường cong thuận tiện hơn. Bài này giới thiệu phép tịnh tiến hệ

toạ độ, nhờ đó có thể xác định được trục đối xứng và tâm đối xứng của một số đường cong.

1. Phép tịnh tiến hệ toạ độ và công thức chuyển hệ toạ độ

Giả sử I là một điểm của mặt phẳng và $(x_0 ; y_0)$ là toạ độ của điểm I đối với hệ toạ độ Oxy. Gọi IXY là hệ toạ độ mới có gốc là điểm I và hai trục IX, IY theo thứ tự có cùng các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ với hai trục Ox, Oy (h.1.5).



Hình 1.5

Giả sử M là một điểm bất kì của mặt phẳng. Gọi $(x ; y)$ là toạ độ của điểm M đối với hệ toạ độ Oxy và $(X ; Y)$ là toạ độ của điểm M đối với hệ toạ độ IXY. Khi đó

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$$

hay

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j}) + (X\vec{i} + Y\vec{j})$$

$$= (X + x_0)\vec{i} + (Y + y_0)\vec{j}.$$

Do đó

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0. \end{cases}$$

Các hệ thức trên gọi là *công thức chuyển hệ toạ độ* trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$.

2. Phương trình của đường cong đối với hệ toạ độ mới

Giả sử $(\mathcal{G})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đối với hệ toạ độ Oxy đã cho. Khi đó phương trình của đường cong $(\mathcal{G})$ đối với hệ toạ độ Oxy là $y = f(x)$. Ta sẽ viết phương trình của $(\mathcal{G})$ đối với hệ toạ độ mới IXY.

Giả sử M là một điểm bất kì của mặt phẳng, $(x ; y)$ và $(X ; Y)$ là toạ độ của điểm M, theo thứ tự, đối với hệ toạ độ Oxy và IXY. Khi đó,

$$M \in (\mathscr{G}) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Áp dụng công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$, ta có

$$M \in (\mathscr{G}) \Leftrightarrow Y + y_0 = f(X + x_0) \Leftrightarrow Y = f(X + x_0) - y_0.$$

Vậy phương trình của đường cong $(\mathscr{G})$ đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y = f(X + x_0) - y_0.$$

Ví dụ. Cho đường cong $(\mathscr{C})$ có phương trình là

$$y = \frac{1}{2}(x - 2)^3 - 1$$

và điểm $I\ (2 ; -1)$.

a) Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY.

b) Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathscr{C})$.

Giải. a) Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1. \end{cases}$$

Phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y - 1 = \frac{1}{2}X^3 - 1 \text{ hay } Y = \frac{1}{2}X^3.$$

b) Vì $Y = \frac{1}{2}X^3$ là một hàm số lẻ nên đồ thị $(\mathscr{C})$ của nó nhận gốc toạ độ I làm tâm đối xứng. □

H *a) Tìm toạ độ đỉnh I của parabol $(\mathscr{P})$ có phương trình là*

$$y = 2x^2 - 4x.$$

b) Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của parabol $(\mathscr{P})$ đối với hệ toạ độ IXY.

Câu hỏi và bài tập

29. Xác định đỉnh I của mỗi parabol $(\mathcal{P})$ sau đây. Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ đối với hệ toạ độ IXY.

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$;   b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$;

c) $y = x - 4x^2$;   d) $y = 2x^2 - 5$.

30. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Xác định điểm I thuộc đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho biết rằng hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

b) Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathscr{C})$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(\mathscr{C})$ tại điểm I đối với hệ toạ độ Oxy. Chứng minh rằng trên khoảng $(-\infty ; 1)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của $(\mathscr{C})$ và trên khoảng $(1 ; +\infty)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Hướng dẫn. Trên khoảng $(-\infty ; 1)$, đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến $y = ax + b$ nếu $f(x) < ax + b$ với mọi $x < 1$.

31. Cho đường cong $(\mathscr{C})$ có phương trình là $y = 2 - \frac{1}{x + 2}$ và điểm $I(-2 ; 2)$. Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của $(\mathscr{C})$.

32. Xác định tâm đối xứng của đồ thị mỗi hàm số sau đây.

a) $y = \dfrac{2}{x-1} + 1$; b) $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$.

Hướng dẫn. b) Viết công thức đã cho dưới dạng $y = 3 - \dfrac{5}{x+1}$.

33. Cho đường cong $(\mathscr{C})$ có phương trình $y = ax + b + \dfrac{c}{x - x_0}$, trong đó $a \neq 0$, $c \neq 0$ và điểm I có toạ độ $(x_0 ; y_0)$ thoả mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và phương trình của $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathscr{C})$.

§ 5 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang

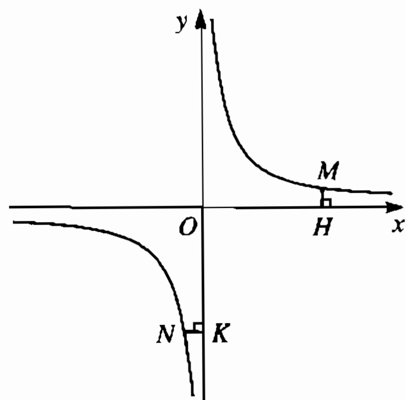
Ta đã biết đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ là đường hypebol gồm hai nhánh nằm trong góc phần tư thứ nhất và thứ ba của mặt phẳng toạ độ (h.1.6).

Ta có

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

và $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Điều đó có nghĩa là khoảng cách $MH = |f(x)|$ từ điểm M của đồ thị đến trục hoành dần đến 0 khi điểm M theo đường hypebol đi xa ra vô tận về phía phải hoặc phía trái.



Hình 1.6

Người ta gọi trục hoành là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$.

Ta cũng có

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ và } \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Điều đó có nghĩa là khoảng cách $NK = |x|$ từ một điểm N của đồ thị đến trục tung dần đến 0 khi điểm N theo đồ thị đi xa ra vô tận về phía trên hoặc phía dưới. Người ta gọi trục tung là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$.

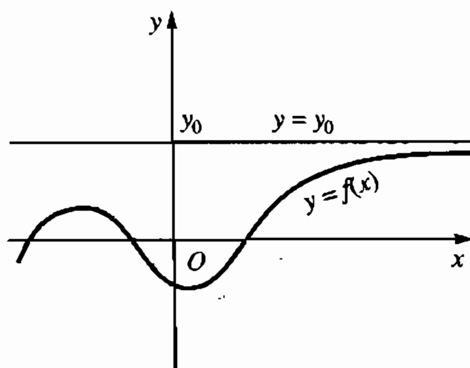
Một cách tổng quát, ta có

ĐỊNH NGHĨA 1

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (gọi tắt là **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

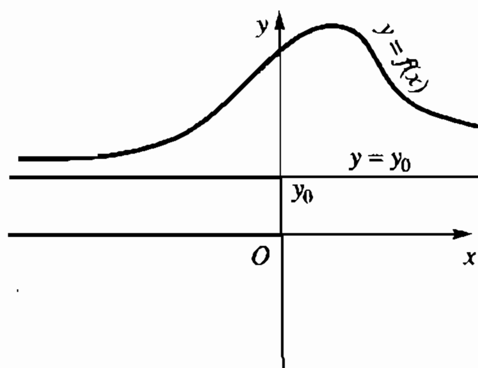
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$

(Xem hình 1.7).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

a)



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

b)

Hình 1.7

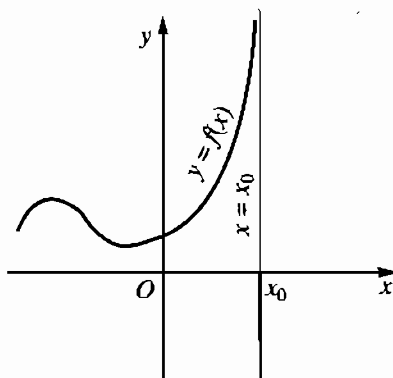
ĐỊNH NGHĨA 2

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (gọi tắt là **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn :

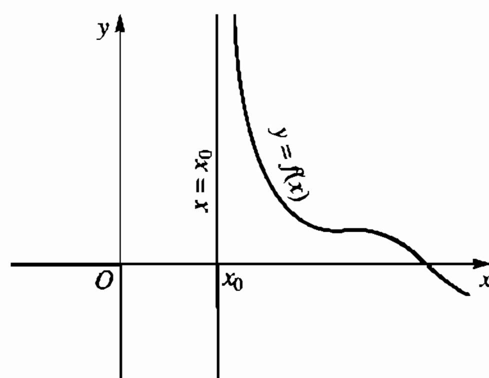
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \ ;$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \ ; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

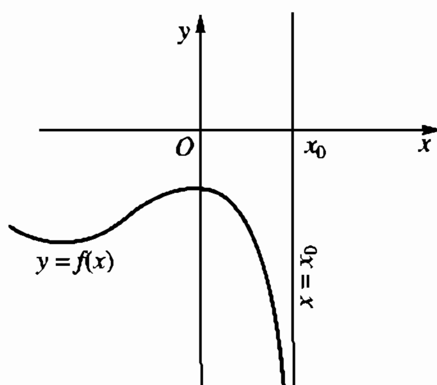
(Xem hình 1.8).



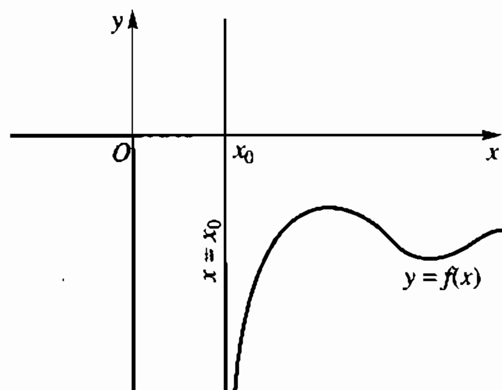
a)



b)



c)



d)

a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^-$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^+$).

Hình 1.8

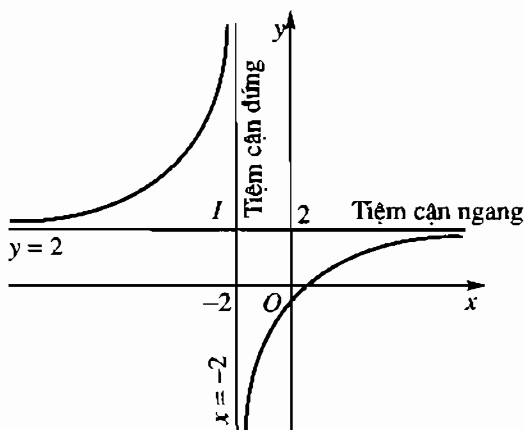
Ví dụ 1. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

Giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$).

Vì $\lim\limits_{x \to (-2)^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-2)^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to (-2)^+$ và khi $x \to (-2)^-$) (h.1.9).



Hình 1.9

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

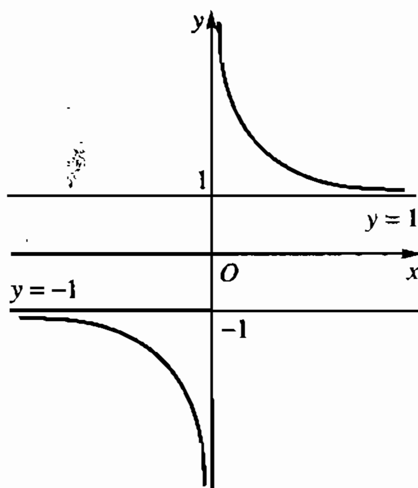
Giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Do đó, đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).



Hình 1.10

Tương tự, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x} = -\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -1.$

Do đó, đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Vì $\lim\limits_{x\to0^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to 0^+$ và khi $x \to 0^-$) (h.1.10).

H1 *Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số* $y = \dfrac{5-3x^2}{1-x^2}$.

2. Đường tiệm cận xiên

Cho $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và (d) là đường thẳng

$$y = ax + b \qquad (a \neq 0).$$

Gọi M và N là hai điểm của $(\mathscr{C})$ và (d) có cùng hoành độ x (h.1.11). Nếu độ dài của đoạn thẳng MN dần đến 0 khi x dần đến $+\infty$ (hoặc khi x dần đến $-\infty$) thì đường thẳng (d) được gọi là đường tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$.

Vì $MN = |f(x) - (ax+b)|$ nên ta có định nghĩa sau :

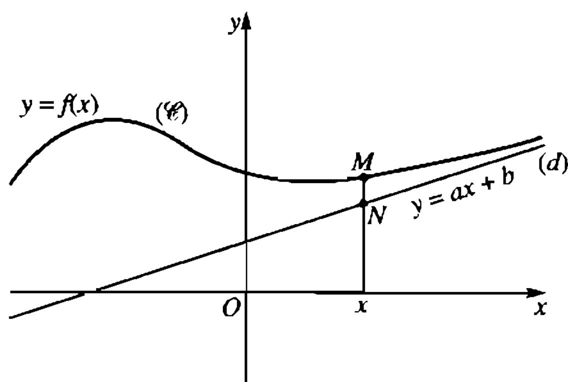
ĐỊNH NGHĨA 3

Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (gọi tắt là **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0,$$

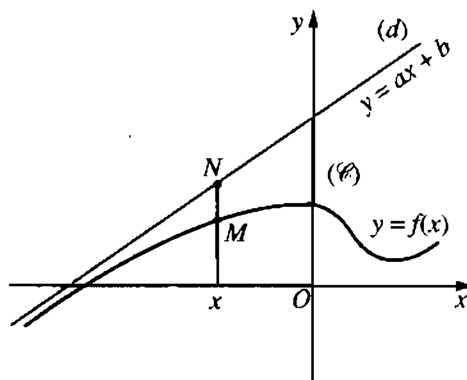
hoặc $$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0.$$

(Xem hình 1.11).



Đường thẳng $y = ax + b$ *là tiệm cận xiên của đồ thị (khi* $x \to +\infty$*).*

a)



Đường thẳng $y = ax + b$ *là tiệm cận xiên của đồ thị (khi* $x \to -\infty$*).*

b)

Hình 1.11

Ví dụ 3. Đồ thị hàm số

$$f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

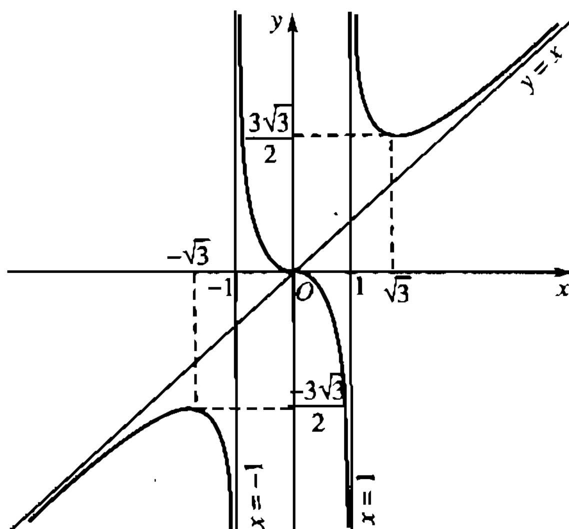
có tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$) là đường thẳng $y = x$ vì

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

và $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

(h.1.12).



Hình 1.12

H2 *Chứng minh rằng đường thẳng* $y = 2x + 1$ *là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số*

$$y = 2x + 1 + \frac{1}{x - 2}.$$

CHÚ Ý

Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên, ta có thể áp dụng các công thức sau :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

hoặc $$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

(Khi $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang).

Thật vậy, xét trường hợp $x \to +\infty$, giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(\alpha ; +\infty)$ và đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \to +\infty$). Khi đó, theo định nghĩa 3, ta có

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0. \qquad (1)$$

Do đó $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0,$$

tức là $$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = 0$ nên

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]. \qquad (3)$$

Đảo lại, nếu a và b thoả mãn (2) và (3) thì từ (3) suy ra (1). Do đó đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $a \neq 0$ và là tiệm cận ngang nếu $a = 0$.

Trường hợp $x \to -\infty$ được chứng minh tương tự.

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Giải. Ta có

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1 \; ;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Theo chú ý vừa nêu, đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$).

Ta cũng có $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$.

Do đó, đường thẳng $y = x$ cũng là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Ta thấy lại kết quả đã nhận được trong ví dụ 3.

H3 *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số*

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}.$$

Câu hỏi và bài tập

34. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x - 2}{3x + 2}$;

b) $y = \dfrac{-2x - 2}{x + 3}$;

c) $y = x + 2 - \dfrac{1}{x - 3}$;

d) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x + 1}$;

e) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$;

f) $y = \dfrac{x}{x^3 + 1}$.

35. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau :

a) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2} + x - 3$;

b) $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 - 2x}$;

c) $y = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 - 1}$;

d) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{-5x^2 - 2x + 3}$.

36. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau :

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; b) $y = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$;

c) $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$; d) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Luyện tập

37. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau :

a) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$; b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

c) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; d) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$.

38. a) Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 3}.$$

b) Xác định giao điểm I của hai tiệm cận trên và viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$.

c) Viết phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY.

Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathscr{C})$.

39. Cùng các câu hỏi như trong bài tập 38 đối với đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x^2 + x - 4}{x + 2}$; b) $y = \dfrac{x^2 - 8x + 19}{x - 5}$.

§ 6 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC

1. Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Trong hai bài §6 và §7 ta sẽ sử dụng những điều đã trình bày trong các bài trước để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Ta sẽ chỉ đề cập đến một số hàm số đơn giản. Khi khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số, ta tiến hành các bước sau đây :

1°. Tìm tập xác định của hàm số.

2°. Xét sự biến thiên của hàm số

a) Tìm giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực (nếu có) của hàm số.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

b) Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm :

Tìm đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

3°. Vẽ đồ thị của hàm số

• Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

• Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao-điểm của đồ thị với các trục toạ độ. (Trong trường hợp đồ thị không cắt các trục toạ độ hoặc việc tìm toạ độ giao điểm phức tạp thì bỏ qua phần này).

• Nhận xét về đồ thị : Chỉ ra trục và tâm đối xứng của đồ thị (nếu có, không yêu cầu chứng minh).

2. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số

$$y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5).$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

b) Bảng biến thiên

Ta có $\quad y' = \frac{1}{8}(3x^2 - 6x - 9)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(3 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1 ; 3)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$; giá trị cực đại của hàm số là $y(-1) = 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(3) = -4$.

3°. *Đồ thị* (h.1.13)

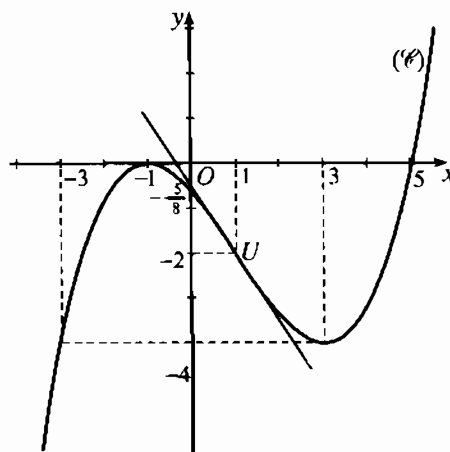
Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $\left(0 ; -\frac{5}{8}\right)$. Ta có

$y = 0 \quad \Leftrightarrow (x+1)^2(x-5) = 0$

$\quad \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$.

Vậy đồ thị và trục hoành có hai điểm chung là $(-1 ; 0)$ và $(5 ; 0)$.

Ngoài ra đồ thị còn đi qua một điểm đặc biệt gọi là điểm uốn của nó mà ta sẽ đề cập sau đây.



Hình 1.13

Điểm uốn của đồ thị

Gọi U là điểm thuộc đồ thị $(\mathscr{C})$ trong ví dụ 1 có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$. Ta có $y'' = \frac{1}{8}(6x - 6)$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Toạ độ của điểm U là $(1 ; -2)$.

Có thể chứng minh được rằng trên khoảng $(-\infty ; 1)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại U, còn trên khoảng $(1 ; +\infty)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến đó. Người ta nói rằng tiếp tuyến tại điểm U xuyên qua đường cong. Điểm U được gọi là điểm uốn của đường cong $(\mathscr{C})$.

Một cách tổng quát, ta có khái niệm điểm uốn như sau :

Điểm $U(x_0 ; f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0 sao cho trên một trong hai khoảng $(a ; x_0)$ và $(x_0 ; b)$ tiếp tuyến của đồ thị tại điểm U nằm phía trên đồ thị còn trên khoảng kia tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị (xem bài tập 30). Người ta nói rằng tiếp tuyến tại điểm uốn xuyên qua đồ thị (xem hình 1.13). Để tìm điểm uốn của đồ thị có thể sử dụng điều khẳng định đã được chứng minh sau đây.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa điểm x_0, $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $U(x_0 ; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ. Tìm điểm uốn của đồ thị hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{4}{3}$.

Giải. Ta có $f'(x) = -x^2 + 2x + 3$, $f''(x) = -2x + 2$ và $f''(x) = 0$ tại điểm $x_0 = 1$. Vì $f''(x)$ đổi dấu (từ dương sang âm) khi x qua điểm $x_0 = 1$ nên $U(1 ; 5)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho. □

Dễ chứng minh được rằng :

Đồ thị của hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ luôn có một điểm uốn và điểm đó là tâm đối xứng của đồ thị.

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2.$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} y = -\infty.$$

b) Bảng biến thiên

Ta có $$y' = -3x^2 + 6x - 4.$$

Vì $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3°. Đồ thị (h.1.14)

• Điểm uốn

Đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = -6x + 6$.

$y'' = 0$ tại điểm $x = 1$ và y'' đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $x = 1$.

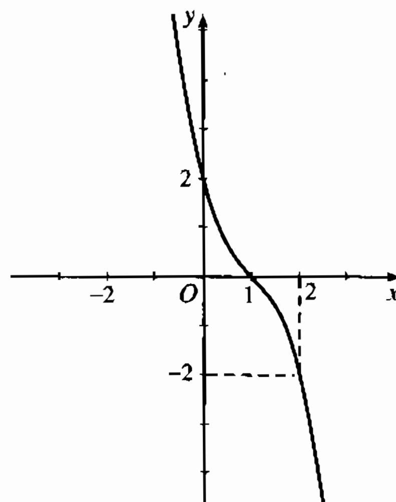
Vậy $U(1 ; 0)$ là điểm uốn của đồ thị.

• Giao điểm của đồ thị với trục toạ độ

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0 ; 2)$.

Phương trình $y = 0$ hay $(x-1)(x^2-2x+2)=0$ có nghiệm $x = 1$.

Do đó, đồ thị cắt trục hoành tại điểm $(1 ; 0)$.



Hình 1.14

Nhận xét : Đồ thị nhận điểm uốn $U(1 ; 0)$ làm tâm đối xứng.

3. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^4 - 2x^2 - 3.$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

b) Bảng biến thiên

Ta có $\quad y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

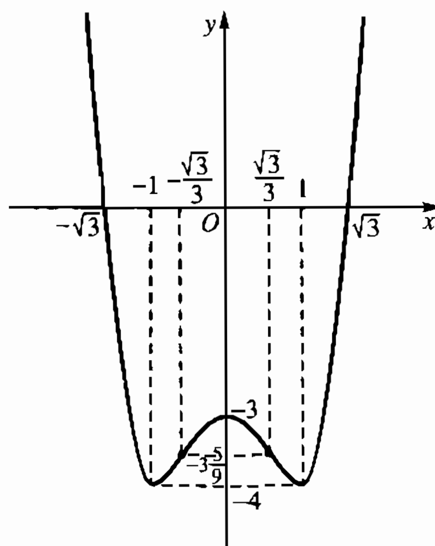
Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; 1)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-1 ; 0)$ và $(1 ; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$, giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = -3$. Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = -4$.

3°. Đồ thị (h.1.15)

• Điểm uốn

Ta có $y'' = 12x^2 - 4$.



Hình 1.15

$y'' = 0$ tại các điểm $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ và y'' đổi dấu khi x qua mỗi điểm x_1 và x_2.

Do đó $U_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -3\frac{5}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -3\frac{5}{9}\right)$ là hai điểm uốn của đồ thị.

- Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0; -3)$.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(-\sqrt{3}\ ; 0)$ và $(\sqrt{3}\ ; 0)$.

Nhận xét : Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

Ví dụ 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^4 - 2x^2 + 3.$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x\to+\infty} y = -\infty.$$

b) Bảng biến thiên

Ta có $y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 3$.

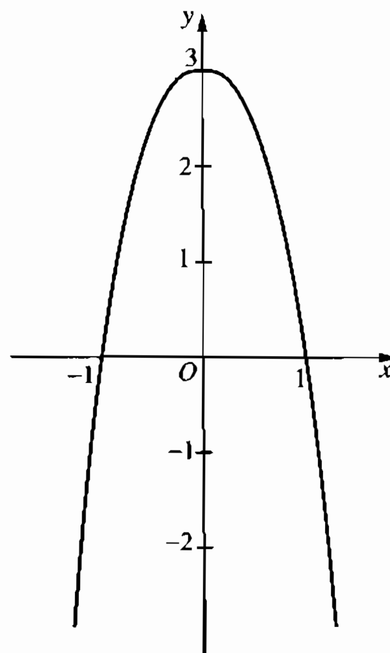
3°. *Đồ thị* (h.1.16)

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $(0 ; 3)$. Ta có

$$y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(-1 ; 0)$ và $(1 ; 0)$.

Nhận xét : Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.



Hình 1.16

CHÚ Ý

Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$.
Người ta chứng minh được rằng
1) Nếu phương trình

$$f''(x) = 0 \qquad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt $x = \pm x_0 \ (x_0 > 0)$ thì đồ thị $(\mathscr{C})$ có hai điểm uốn $U_1(x_0 ; f(x_0))$ và $U_2(-x_0 ; f(-x_0))$ đối xứng với nhau qua trục tung.

2) Nếu phương trình (1) có một nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì đồ thị $(\mathscr{C})$ không có điểm uốn.

(Dễ thấy rằng đồ thị hàm số trong ví dụ 4 không có điểm uốn).

Câu hỏi và bài tập

40. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 - 4.$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn.

c) Chứng minh rằng điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.

41. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 - 1.$$

b) Tuỳ theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$-x^3 + 3x^2 - 1 = m.$$

42. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$;

b) $y = x^3 - 3x + 1$;

c) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - \frac{2}{3}$;

d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

43. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^4 + 2x^2 - 2.$$

b) Tuỳ theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$-x^4 + 2x^2 - 2 = m.$$

c) Viết phương trình tiếp tuyến tại các điểm uốn của đồ thị ở câu a).

44. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^4 - 3x^2 + 2$;

b) $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

Luyện tập

45. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 + 1.$$

b) Tuỳ theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x^2 + m + 2 = 0.$$

46. Cho hàm số

$$y = (x + 1)(x^2 + 2mx + m + 2).$$

a) Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = -1$.

47. Cho hàm số

$$y = x^4 - (m+1)x^2 + m.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$.

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua hai điểm cố định với mọi giá trị của m.

48. Cho hàm số

$$y = x^4 - 2mx^2 + 2m.$$

a) Tìm các giá trị của m sao cho hàm số có ba điểm cực trị.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = \frac{1}{2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm uốn.

§ 7 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

1. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$)

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2x-1}{x-1}.$$

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to 1^-$ và khi $x \to 1^+$).

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$).

b) Bảng biến thiên

Ta có $$y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0 \text{ với mọi } x \neq 1.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

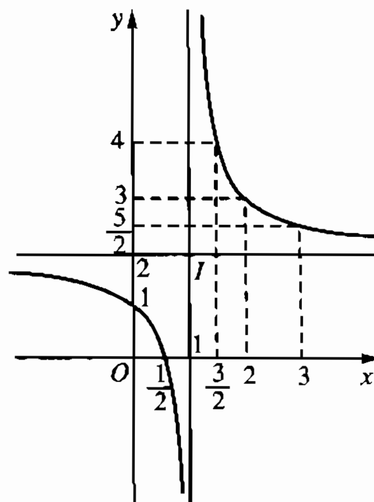
Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$.

3°. Đồ thị (h.1.17)

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0 ; 1)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

Nhận xét : Đồ thị nhận giao điểm $I(1 ; 2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

H1 *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{1-x}{x+2}$.



Hình 1.17

2. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ $(a \neq 0, a' \neq 0)$

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Giải

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = x + 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Vì $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to (-1)^-$ và khi $x \to (-1)^+$).

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[y - (x+1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, và $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[y - (x+1)\right] = 0$ nên đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$).

b) Bảng biến thiên

Ta có : $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$.

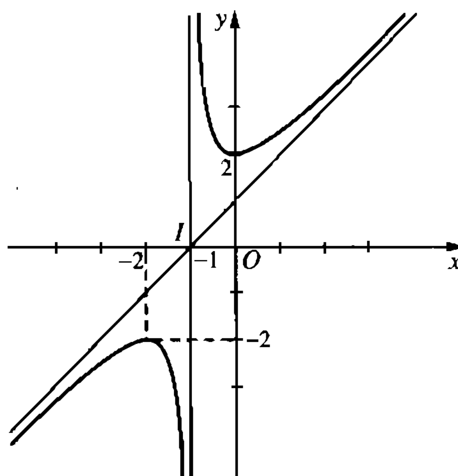
x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty\,; -2)$ và $(0\,; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2\,; -1)$ và $(-1\,; 0)$.
Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$ với giá trị cực đại $y(-2) = -2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ với giá trị cực tiểu $y(0) = 2$..

3°. Đồ thị (h.1.18)

Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0 ; 2).

Nhận xét : Đồ thị nhận giao điểm $I(-1\,; 0)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



Hình 1.18

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}.$$

Giải. Có thể viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = x - \frac{3}{x - 2}.$$

1°. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

a) Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận

Ta có

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} y = +\infty \text{ ;}$$

$$\lim_{x \to 2^-} y = +\infty \text{ và } \lim_{x \to 2^+} y = -\infty.$$

Do đó, đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to 2^-$ và khi $x \to 2^+$).

Vì $y - x = \dfrac{-3}{x - 2} \to 0$ khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$ nên đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$).

b) Bảng biến thiên

Vì $y' = 1 + \dfrac{3}{(x - 2)^2} > 0$ với mọi $x \neq 2$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

3°. *Đồ thị* (h.1.19)

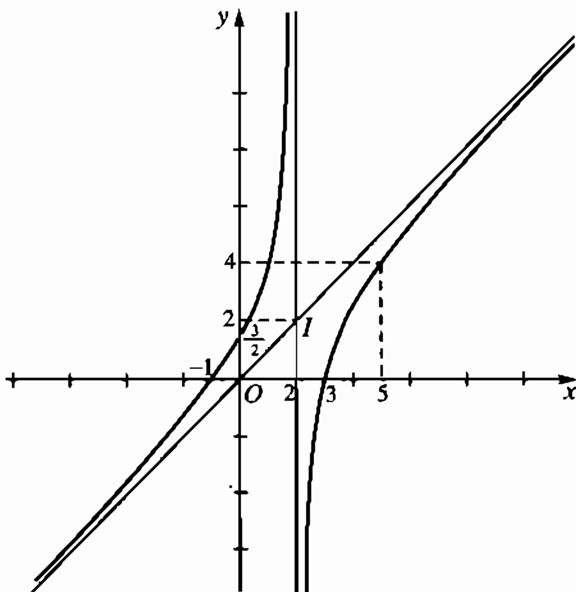
• Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $\left(0 ; \frac{3}{2}\right)$. Ta có

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(-1 ; 0)$ và $(3 ; 0)$.

Nhận xét : Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2 ; 2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

H2 *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số* $y = \dfrac{-x^2 - 2x}{x + 1}$.



Hình 1.19

Câu hỏi và bài tập

49. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x - 2}{2x + 1}.$$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

50. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; b) $y = \dfrac{2x + 1}{1 - 3x}$.

51. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}.$$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

c) Tuỳ theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2} + m = 0.$$

52. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$;

b) $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{1 - x}$;

c) $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 3}{x + 2}$;

d) $y = -x + 2 + \dfrac{1}{x - 1}$.

Luyện tập

53. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại giao điểm A của đồ thị với trục tung.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đó song song với tiếp tuyến tại điểm A.

54. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathcal{H})$ của hàm số $y = 1 - \dfrac{1}{x + 1}$.

b) Từ đồ thị $(\mathcal{H})$ suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số $y = -1 + \dfrac{1}{x + 1}$.

55. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x - \dfrac{2}{x - 1}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm (3 ; 3).

56. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$.

b) Từ đồ thị $(\mathscr{C})$ suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2}{|x + 1|}$.

§ 8 MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

1. Giao điểm của hai đồ thị

Các đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại điểm $M(x_0\,;\,y_0)$ khi và chỉ khi $y_0 = f(x_0)$ và $y_0 = g(x_0)$, tức là $(x_0\,;\,y_0)$ là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x). \end{cases}$$

Như vậy hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên là nghiệm của phương trình

$$f(x) = g(x).$$

Số nghiệm của phương trình trên bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Ví dụ 1. Với các giá trị nào của m, đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt ?

Giải

Hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = m$, tức là

$$x^4 - 2x^2 - m - 3 = 0. \qquad (1)$$

Đặt $X = x^2$, $X \geq 0$, ta được

$$X^2 - 2X - m - 3 = 0. \qquad (2)$$

Đường thẳng cắt đường cong đã cho tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương X_1, X_2 phân biệt, tức là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ X_1X_2 > 0 \\ X_1 + X_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 4 > 0 \\ -m - 3 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -3.$$

□

Nhận xét

Có thể giải bài toán trên bằng đồ thị như sau :

Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ được cho trong hình 1.15.

Đồ thị của hàm số $y = m$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành. Dựa vào đồ thị của hai hàm số đã cho, ta thấy ngay rằng đường thẳng và đường cong đã cho cắt nhau tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < m < -3$.

H1 *Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng $y = x - m$ cắt đường cong $y = \dfrac{-x^2 + 2x}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt.*

2. Sự tiếp xúc của hai đường cong

ĐỊNH NGHĨA

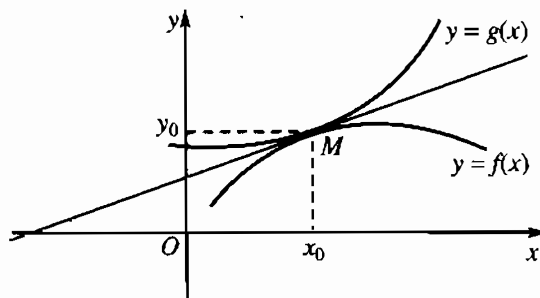
Giả sử hai hàm số f và g có đạo hàm tại điểm x_0. Ta nói rằng hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ **tiếp xúc** với nhau tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ nếu M là một điểm chung của chúng và hai đường cong có tiếp tuyến chung tại điểm M. Điểm M được gọi là **tiếp điểm** của hai đường cong đã cho.

Hiển nhiên các đồ thị của hai hàm số đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ (h.1.20) khi và chỉ khi

$$y_0 = f(x_0),\ \ y_0 = g(x_0)$$

và $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Từ đó dễ dàng suy ra rằng



Hình 1.20

Hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

có nghiệm và nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đó.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hai đường cong

$$y = x^3 + \frac{5}{4}x - 2 \text{ và } y = x^2 + x - 2$$

tiếp xúc với nhau tại một điểm nào đó.

Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong đã cho tại điểm đó.

Giải

Hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x^3 + \frac{5}{4}x - 2 = x^2 + x - 2 \\ \left(x^3 + \frac{5}{4}x - 2\right)' = (x^2 + x - 2)'. \end{cases}$$

Ta có

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 + \frac{x}{4} = 0 \\ 3x^2 + \frac{5}{4} = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy hai đường cong đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến chung tại điểm M của hai đường cong đã cho là $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm M là $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{4}$, hay $y = 2x - \frac{9}{4}$.

H2 *Chứng minh rằng đường cong $y = x^3 - x$ tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 1$ tại một điểm nào đó.*

Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm đó.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng đường thẳng $y = px + q$ là tiếp tuyến của parabol $y = ax^2 + bx + c$ khi và chỉ khi phương trình

$$ax^2 + bx + c = px + q$$

hay

$$ax^2 + (b - p)x + c - q = 0 \qquad (3)$$

có nghiệm kép, tức là

$$\Delta = (b - p)^2 - 4a(c - q) = 0.$$

Chứng minh

Ta đã biết : Đường thẳng và parabol đã cho tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = px + q \\ (ax^2 + bx + c)' = (px + q)' \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} ax^2 + (b - p)x + c - q = 0 \\ 2ax + b = p \end{cases} \qquad (4)$$

có nghiệm.

Nếu đường thẳng tiếp xúc với parabol thì hệ phương trình trên có nghiệm. Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của hệ phương trình trên. Khi đó, vì $a \neq 0$ nên từ (4) ta có $x_0 = \frac{p - b}{2a}\cdot$ Thay vào (3), ta được

$$a\frac{(p - b)^2}{4a^2} + (b - p)\frac{(p - b)}{2a} + c - q = 0.$$

Từ đó suy ra

$$(b - p)^2 - 4a(c - q) = 0.$$

Vậy phương trình (3) có nghiệm kép.

Đảo lại, nếu phương trình (3) có nghiệm kép x_0 thì $x_0 = \frac{p - b}{2a}\cdot$ Hiển nhiên $x = x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (4). Vậy hệ phương trình trên có nghiệm. Do đó đường thẳng là tiếp tuyến của parabol.

CHÚ Ý

Có thể áp dụng điều khẳng định trong ví dụ 3 để xét sự tiếp xúc của đường thẳng và parabol.

Ví dụ 4. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1\ ;\ -2)$ và tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x$.

Giải

Phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1\ ;\ -2)$ và có hệ số góc m là $y = m(x-1) - 2$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol đã cho là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x = m(x-1) - 2$, tức là

$$x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0. \qquad (5)$$

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình (5) có nghiệm kép, tức là

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ hoặc } m = -2.$$

Vậy có hai tiếp tuyến của parabol đã cho đi qua điểm A. Đó là hai đường thẳng

$$y = 2(x-1) - 2 \text{ hay } y = 2x - 4$$

và

$$y = -2(x-1) - 2 \text{ hay } y = -2x.$$

Câu hỏi và bài tập

57. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1.$$

b) Tìm các giao điểm của đường cong $(\mathscr{C})$ và parabol

$$(\mathscr{P}):\ g(x) = 2x^2 + 1.$$

c) Viết phương trình các tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{P})$ tại mỗi giao điểm của chúng.

d) Xác định các khoảng trên đó $(\mathscr{C})$ nằm phía trên hoặc phía dưới $(\mathscr{P})$.

58. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2x-1}{x+1}.$$

b) Với các giá trị nào của m, đường thẳng d_m đi qua điểm $A(-2\ ;\ 2)$ và có hệ số góc m cắt đồ thị của hàm số đã cho

- Tại hai điểm phân biệt ?
- Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị ?

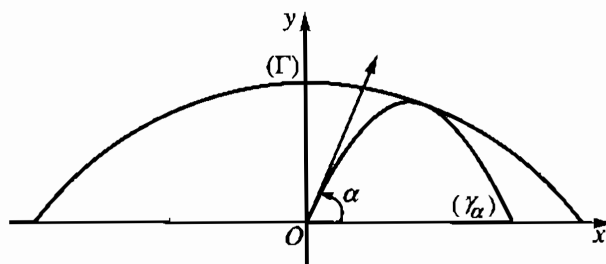
59. Chứng minh rằng các đồ thị của ba hàm số

$$f(x) = -x^2 + 3x + 6,\ \ g(x) = x^3 - x^2 + 4 \text{ và } h(x) = x^2 + 7x + 8$$

tiếp xúc với nhau tại điểm $A(-1\ ;\ 2)$ (tức là chúng có cùng tiếp tuyến tại A).

60. Chứng minh rằng các đồ thị của hai hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x$ và $g(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ tiếp xúc với nhau. Xác định tiếp điểm của hai đường cong trên và viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại điểm đó.

61. Một viên đạn được bắn ra với vận tốc ban đầu $v_0 > 0$ từ một nòng súng đặt ở gốc toạ độ O, nghiêng một góc α với mặt đất (nòng súng nằm trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy và tạo với trục hoành Ox góc α) (h.1.21). Biết quỹ đạo chuyển động của viên đạn là parabol.



Hình 1.21

$$(\gamma_\alpha):\qquad y = -\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$$

(g là gia tốc trọng trường).

Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, (γ_α) luôn tiếp xúc với parabol (Γ) có phương trình là

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

và tìm toạ độ tiếp điểm ((Γ) được gọi là *parabol an toàn*).

Luyện tập

62. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đường cong đã cho là tâm đối xứng của nó.

63. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathcal{H})$ của hàm số

$$y = \frac{x+2}{2x+1}.$$

b) Chứng minh rằng đường thẳng $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong $(\mathcal{H})$ khi m biến thiên.

c) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong $(\mathcal{H})$ tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của $(\mathcal{H})$.

64. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 - bx}{x-1}$.

a) Tìm a và b biết rằng đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho đi qua điểm $A\left(-1 ; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm $O(0 ; 0)$ có hệ số góc bằng -3.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với các giá trị của a và b đã tìm được.

65. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

b) Với các giá trị nào của m đường thẳng $y = m - x$ cắt đồ thị của hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt ?

c) Gọi A và B là hai giao điểm đó. Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m biến thiên.

66. Tìm các hệ số a và b sao cho parabol $y = 2x^2 + ax + b$ tiếp xúc với hypebol $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $M\left(\frac{1}{2}\,; 2\right)$.

67. Một tạp chí được bán với giá 20 nghìn đồng một cuốn. Chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm : lương cán bộ, công nhân viên, giấy in, ...) được cho bởi

$$C(x) = 0{,}0001x^2 - 0{,}2x + 10000,$$

$C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

1°. a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất.

2°. Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 90 triệu đồng nhận được từ quảng cáo và sự trợ giúp cho báo chí. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết.

a) Chứng minh rằng số tiền lãi khi in x cuốn tạp chí là

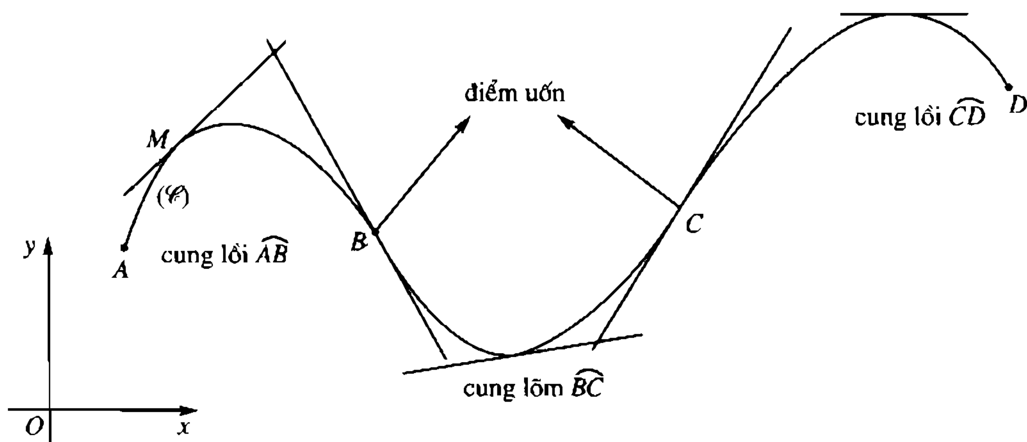
$$L(x) = -\,0{,}0001x^2 + 1{,}8x - 1000.$$

b) Hỏi in bao nhiêu cuốn thì có lãi ?

c) In bao nhiêu cuốn thì lãi nhiều nhất ? Tính số tiền lãi đó.

Bài đọc thêm

TÍNH LỒI, LÕM VÀ ĐIỂM UỐN CỦA ĐƯỜNG CONG



Hình 1.22

Đường cong ($\mathscr{C}$) trên hình 1. 22 gồm ba cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ và $\overset{\frown}{CD}$. Ta thấy tiếp tuyến của đường cong tại mỗi điểm M của cung $\overset{\frown}{AB}$ đều nằm phía trên của cung ; người ta gọi $\overset{\frown}{AB}$ là một cung lồi. Trái lại, tiếp tuyến tại mỗi điểm của cung $\overset{\frown}{BC}$ nằm phía dưới của cung ; $\overset{\frown}{BC}$ được gọi là một cung lõm. Điểm *B* là điểm phân chia hai cung lồi và cung lõm của đường cong ; người ta gọi nó là một điểm uốn của đường cong ($\mathscr{C}$).

Tương tự, *C* cũng là một điểm uốn vì nó phân chia cung lõm $\overset{\frown}{BC}$ và cung lồi $\overset{\frown}{CD}$. Ta cũng thấy tiếp tuyến của đường cong tại điểm uốn xuyên qua đường cong.

Sau đây ta sẽ giới thiệu các khái niệm đã nêu một cách chính xác.

1. Tính lồi, lõm của đồ thị

Định nghĩa. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Ta nói rằng

a) Đồ thị ($\mathscr{C}$) của hàm số $y = f(x)$ lồi trên khoảng I nếu tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) tại mỗi điểm của nó đều nằm phía trên đồ thị.

b) Đồ thị ($\mathscr{C}$) của hàm số $y = f(x)$ lõm trên khoảng I nếu tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) tại mỗi điểm của nó đều nằm phía dưới đồ thị.

Ta thừa nhận định lí sau đây.

Định lí. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng I. Khi đó

a) Nếu $f''(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = f(x)$ lồi trên I.

b) Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = f(x)$ lõm trên I.

Ví dụ 1. Xét tính lồi, lõm của hai parabol $f(x) = x^2$ và $g(x) = -x^2$.

Giải. Ta có $f'(x) = 2x$ và $f''(x) = 2$.

Vì $f''(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên parabol $f(x) = x^2$ lõm trên $\mathbb{R}$.

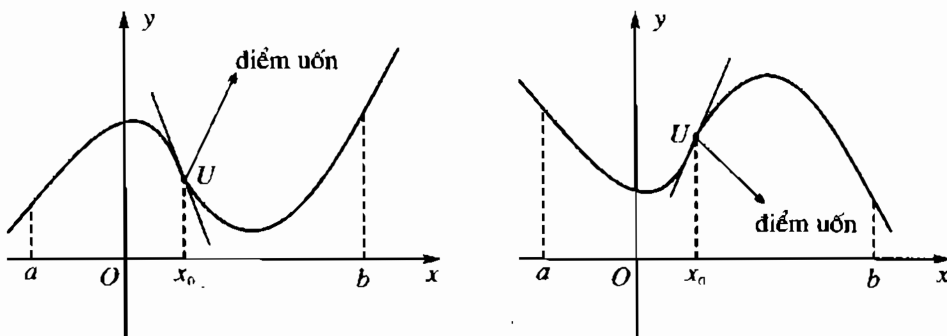
Trái lại, vì $g''(x) = -2 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên parabol $g(x) = -x^2$ lồi trên $\mathbb{R}$.

Có thể thấy ngay điều khẳng định trên từ định nghĩa. Tiếp tuyến của parabol $f(x) = x^2$ tại mỗi điểm của nó đều nằm phía dưới đồ thị và tiếp tuyến của parabol $g(x) = -x^2$ tại mỗi điểm của nó đều nằm phía trên đồ thị.

Chú ý. Điều kiện nêu trong định lí trên chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần của tính lồi, lõm của đồ thị. Chẳng hạn, đường cong $f(x) = x^4$ là lõm trên $\mathbb{R}$ vì tiếp tuyến của đường cong tại mỗi điểm của nó đều nằm phía dưới đường cong. Tuy nhiên, ta có $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f''(x) = 0$ tại $x = 0$.

2. Điểm uốn của đồ thị

Định nghĩa. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0. Nếu đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = f(x)$ lồi trên một trong hai khoảng $(a ; x_0)$, $(x_0 ; b)$ và lõm trên khoảng còn lại thì $U(x_0 ; f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đồ thị $(\mathscr{C})$ (h.1. 23).



Hình 1.23

Nói một cách khác, điểm uốn của đồ thị là điểm phân chia hai phần lồi và lõm của đồ thị.

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn luôn xuyên qua đồ thị.

Từ định lí về tính lồi, lõm của đồ thị, dễ dàng suy ra

Định lí. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng I chứa điểm x_0. Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $U(x_0 ; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 2. Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{4}{3}.$$

Giải. Ta có $y' = -x^2 + 2x + 3$ và $y'' = -2x + 2$.

Bảng xét dấu của y'':

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		+	0	–	
y			5		

Vì $y'' > 0$ trên khoảng $(-\infty; 1)$ nên đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số lõm trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Vì $y'' < 0$ trên khoảng $(1; +\infty)$ nên đồ thị $(\mathscr{C})$ lồi trên khoảng $(1; +\infty)$.

$U(1 ; 5)$ là điểm uốn của đồ thị $(\mathscr{C})$.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương I

68. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\tan x > x$, với mọi $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ với mọi $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn. a) Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \tan x - x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

69. Xét chiều biến thiên và tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{3x + 1}$; b) $y = \sqrt{4x - x^2}$;

c) $y = x + \sqrt{x}$; d) $y = x - \sqrt{x}$.

70. Người ta định làm một cái hộp hình trụ bằng tôn có thể tích V cho trước. Tìm bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ sao cho tốn ít nguyên liệu nhất.

71. Chu vi của một tam giác là 16cm, độ dài một cạnh tam giác là 6cm. Tìm độ dài hai cạnh còn lại của tam giác sao cho tam giác có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn. Có thể áp dụng công thức Hê-rông (Héron) để tính diện tích tam giác :

Nếu tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c thì diện tích của nó là

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p \text{ là nửa chu vi tam giác.}$$

72. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{17}{3}.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

73. Cho hàm số

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

a) Tìm điều kiện đối với p và q để hàm số f có một cực đại và một cực tiểu.

b) Chứng minh rằng nếu giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu thì phương trình

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt.

c) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

74. Cho hàm số

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn U của nó.

c) Gọi (d_m) là đường thẳng đi qua điểm U và có hệ số góc m. Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng (d_m) cắt đồ thị của hàm số đã cho tại ba điểm phân biệt.

75. Cho hàm số

$$y = x^4 - (m+1)x^2 + m.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm, tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

76. Cho hàm số $f(x) = x^4 - x^2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$.

77. Cho hàm số

$$y = \frac{x - 4m}{2(mx - 1)}$$

có đồ thị là $(\mathcal{H}_m)$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 1$.

b) Chứng minh rằng với mọi $m \neq \pm\frac{1}{2}$, các đường cong $(\mathcal{H}_m)$ đều đi qua hai điểm cố định A và B.

c) Chứng minh rằng tích các hệ số góc của các tiếp tuyến với $(\mathcal{H}_m)$ tại hai điểm A và B là một hằng số khi m biến thiên.

78. a) Vẽ đồ thị $(\mathcal{P})$ của hàm số $y = x^2 - x + 1$ và đồ thị $(\mathcal{H})$ của hàm số $y = \frac{1}{x + 1}$.

b) Tìm giao điểm của hai đường cong $(\mathcal{P})$ và $(\mathcal{H})$. Chứng minh rằng hai đường cong đó có tiếp tuyến chung tại giao điểm của chúng.

c) Xác định các khoảng trên đó $(\mathcal{P})$ nằm phía trên hoặc phía dưới $(\mathcal{H})$.

79. Cho hàm số

$$y = f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số.

b) Tiếp tuyến của đường cong ($\mathscr{C}$) tại điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận xiên tại hai điểm A và B. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB và tam giác OAB có diện tích không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên đường cong ($\mathscr{C}$).

Bài tập trắc nghiệm khách quan

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

80. Hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{3}{4}$

(A) Đồng biến trên khoảng $(-2 ; 3)$;

(B) Nghịch biến trên khoảng $(-2 ; 3)$;

(C) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -2)$;

(D) Đồng biến trên khoảng $(-2 ; +\infty)$.

81. Hàm số $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 22$

(A) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$;

(B) Đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$;

(C) Đồng biến trên $\mathbb{R}$;

(D) Nghịch biến trên khoảng $(0 ; 1)$.

82. Hàm số $y = \sin x - x$

(A) Đồng biến trên $\mathbb{R}$;

(B) Đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$;

(C) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$;

(D) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

83. Hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

(A) Nhận điểm $x = -1$ làm điểm cực tiểu ;

(B) Nhận điểm $x = 3$ làm điểm cực đại ;

(C) Nhận điểm $x = 1$ làm điểm cực đại ;

(D) Nhận điểm $x = 3$ làm điểm cực tiểu.

84. Hàm số $y = x^4 - 4x^3 - 5$

(A) Nhận điểm $x = 3$ làm điểm cực tiểu ;

(B) Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực đại ;

(C) Nhận điểm $x = 3$ làm điểm cực đại ;

(D) Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực tiểu.

85. Số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ là

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 3 ; (D) 2.

86. Số điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ là

(A) 0 ; (B) 2 ; (C) 1 ; (D) 3.

87. Hàm số f có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x+1)^2(2x-1)$.

Số điểm cực trị của hàm số là

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 0 ; (D) 3.

88. Hàm số $y = x - \sin 2x + 3$

(A) Nhận điểm $x = -\dfrac{\pi}{6}$ làm điểm cực tiểu ;

(B) Nhận điểm $x = \dfrac{\pi}{2}$ làm điểm cực đại ;

(C) Nhận điểm $x = -\dfrac{\pi}{6}$ làm điểm cực đại ;

(D) Nhận điểm $x = -\dfrac{\pi}{2}$ làm điểm cực tiểu.

89. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3\sqrt{1-x}$ là

(A) -3 ; (B) 1 ; (C) -1 ; (D) 0.

90. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\cos x$ là

(A) 3 ; (B) -5 ; (C) -4 ; (D) -3.

91. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1 ; 2]$ là

(A) 6 ; (B) 10 ; (C) 15 ; (D) 11.

92. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ là

(A) 2 ; (B) $\sqrt{2}$; (C) 0 ; (D) 3.

93. Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{2x + 1}$.

(A) Đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của $(\mathscr{C})$.

(B) Đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$.

(C) Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$.

(D) Đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$.

94. Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{3 + 5x - 2x^2}$.

(A) Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của $(\mathscr{C})$.

(B) Đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của $(\mathscr{C})$.

(C) Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của $(\mathscr{C})$.

(D) Đường thẳng $y = -x + 1$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$.

95. Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{-5x^2 - 2x + 3}$.

(A) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của $(\mathscr{C})$.

(B) Đường thẳng $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$.

(C) Đường thẳng $y = -\dfrac{1}{5}$ là tiệm cận ngang của $(\mathscr{C})$.

(D) Đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của $(\mathscr{C})$.

96. Đồ thị của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x - 1}$

(A) Cắt đường thẳng $y = 1$ tại hai điểm ;

(B) Cắt đường thẳng $y = 4$ tại hai điểm ;

(C) Tiếp xúc với đường thẳng $y = 0$;

(D) Không cắt đường thẳng $y = -2$.

97. Xét phương trình $x^3 + 3x^2 = m$.

(A) Với $m = 5$, phương trình đã cho có ba nghiệm.

(B) Với $m = -1$, phương trình có hai nghiệm.

(C) Với $m = 4$, phương trình có ba nghiệm phân biệt.

(D) Với $m = 2$, phương trình có ba nghiệm phân biệt.

98. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$.

(A) Nhận điểm $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng ;

(B) Nhận điểm $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 2\right)$ làm tâm đối xứng ;

(C) Không có tâm đối xứng ;

(D) Nhận điểm $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng.

99. Số giao điểm của hai đường cong $y = x^3 - x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - x + 1$ là

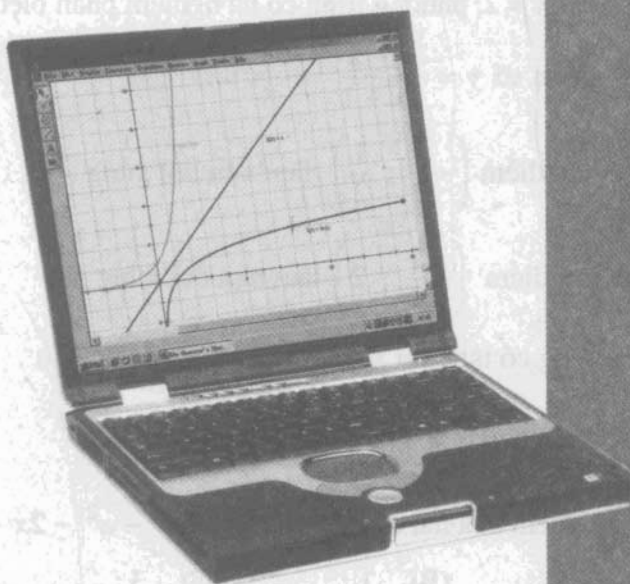
(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 3 ; (D) 2.

100. Các đồ thị của hai hàm số $y = 3 - \dfrac{1}{x}$ và $y = 4x^2$ tiếp xúc với nhau tại điểm M có hoành độ là

(A) $x = -1$; (B) $x = 1$; (C) $x = 2$; (D) $x = \dfrac{1}{2}$.

Chương II

HÀM SỐ LUỸ THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT



Trong chương này, luỹ thừa với số mũ nguyên được mở rộng cho số mũ hữu tỉ, số mũ thực và từ đó hình thành khái niệm lôgarit. Đây là những phép tính được sử dụng nhiều trong khoa học, kĩ thuật và đời sống. Trên cơ sở đó, ta khảo sát hai hàm số quan trọng là **hàm số mũ** và **hàm số lôgarit**. Cuối chương sẽ nêu một số phương pháp giải phương trình mũ và phương trình lôgarit.

Học sinh cần nắm được các tính chất của luỹ thừa và lôgarit, của hàm số mũ và hàm số lôgarit; đồng thời vận dụng được các tính chất ấy để giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.

§ 1 LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

Nhắc lại rằng với mỗi số nguyên dương n, luỹ thừa bậc n của số a (còn gọi là luỹ thừa của a với số mũ n) là số a^n xác định bởi

$$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}} \quad \text{với } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

a được gọi là *cơ số*, n được gọi là *số mũ* của luỹ thừa a^n.

H1 *Tính* $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $(-\sqrt{3})^5$, 0^4.

Để có khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên, ta còn phải định nghĩa luỹ thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm.

a) Luỹ thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm

ĐỊNH NGHĨA 1

> Với $a \neq 0$, $n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm, luỹ thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi
>
> $$a^0 = 1,\ a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Ví dụ 1. $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$; $\left(-\sqrt{2}\right)^0 = 1$.

Ví dụ 2. Nếu sử dụng luỹ thừa với số mũ nguyên của 10 để biểu diễn một số, chẳng hạn số 2418,93 dưới dạng :

$$2418,93 = 2.10^3 + 4.10^2 + 1.10 + 8.10^0 + 9.10^{-1} + 3.10^{-2}$$

thì ta thấy trong tổng trên, mỗi số hạng có dạng $a.10^k$, số mũ k chỉ rõ vị trí của chữ số a trong biểu diễn thập phân của số đã cho. Chẳng hạn, với $k = -1$

thì chữ số a ở hàng phần mười, với $k = 0$ thì chữ số a ở hàng đơn vị, với $k = 1$ thì chữ số a ở hàng chục, ...

CHÚ Ý

1) Các kí hiệu 0^0, 0^n (n nguyên âm) không có nghĩa.

2) Với $a \neq 0$ và n nguyên, ta có $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

3) Người ta thường dùng các luỹ thừa của 10 với số mũ nguyên để biểu thị những số rất lớn và những số rất bé.

Chẳng hạn

Khối lượng của Trái Đất là $5{,}97.10^{24}$ kg,

Khối lượng nguyên tử của hiđrô là $1{,}66.10^{-24}$ g,

Trò chơi Rubic (Rubik) có hơn 4.10^{19} cách sắp xếp.

b) Tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên

Quy tắc tính

Từ định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên của một số, ta thấy các quy tắc tính toán cho luỹ thừa với số mũ tự nhiên vẫn còn đúng với số mũ nguyên. Cụ thể ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

Với $a \neq 0, b \neq 0$ và với các số nguyên m, n, ta có

1) $a^m.a^n = a^{m+n}$; 2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$; 4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Ta chứng minh công thức 5).

Với $n \geq 0$, công thức hiển nhiên đúng.

Với $n < 0$, ta có $-n$ là số nguyên dương. Do đó

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}} = \frac{1}{\frac{a^{-n}}{b^{-n}}} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Các công thức khác được chứng minh tương tự.

H2 *Chứng minh công thức 1) của định lí 1 cho trường hợp* $m > 0$, $n \leq 0$ *và* $m > |n|$.

So sánh các luỹ thừa

ĐỊNH LÍ 2

> Cho m, n là những số nguyên. Khi đó
>
> 1) Với $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$;
>
> 2) Với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

Từ định lí 2, ta có

HỆ QUẢ 1

> Với $0 < a < b$ và m là số nguyên thì
>
> 1) $a^m < b^m$ khi và chỉ khi $m > 0$;
>
> 2) $a^m > b^m$ khi và chỉ khi $m < 0$.

Chứng minh

Vì $0 < a < b$ nên $\frac{b}{a} > 1$ và $0 < \frac{a}{b} < 1$.

Theo 1) của định lí 2, ta có $\left(\frac{b}{a}\right)^m > \left(\frac{b}{a}\right)^0 \Leftrightarrow m > 0$, hay

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0.$$

Theo 2) của định lí 2, ta có $\left(\frac{a}{b}\right)^m > \left(\frac{a}{b}\right)^0 \Leftrightarrow m < 0$, hay

$$a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0.$$

□

Từ hệ quả 1, ta có thể chứng minh được hai hệ quả sau :

HỆ QUẢ 2

Với $a < b$, n là số tự nhiên lẻ thì

$$a^n < b^n.$$

HỆ QUẢ 3

Với a, b là những số dương, n là một số nguyên khác 0 thì

$$a^n = b^n \text{ khi và chỉ khi } a = b.$$

H3 *Có phải* $(0,99)^2.99 > 99$? *và* $(0,99)^{-1}.99 > 99$?

2. Căn bậc *n* và luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Ta đã có khái niệm căn bậc hai, căn bậc ba của một số. Sau đây, ta xét khái niệm căn bậc n của một số.

a) Căn bậc *n*

ĐỊNH NGHĨA 2

Với n nguyên dương, **căn bậc *n*** của số thực a là số thực b sao cho

$$b^n = a.$$

Ta thừa nhận hai khẳng định sau đây.

• *Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n.* Căn đó được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.

• *Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau.* Căn có giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (còn gọi là *căn số học bậc n* của a), căn có giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$. Đặc biệt, $\sqrt[2]{a}$ được kí hiệu đơn giản là $\sqrt{a}$.

Ví dụ : Số 32 chỉ có một căn bậc năm là $\sqrt[5]{32} = 2$; số 64 có hai căn bậc sáu là $\sqrt[6]{64} = 2$ và $-\sqrt[6]{64} = -2$.

Nhận xét

1) Căn bậc 1 của số a chính là a.

2) Căn bậc n của số 0 là 0.

3) Số âm không có căn bậc chẵn vì luỹ thừa bậc chẵn của một số thực bất kì là số không âm.

4) Với n nguyên dương lẻ, ta có

$$\sqrt[n]{a} > 0 \text{ khi } a > 0;$$

$$\sqrt[n]{a} < 0 \text{ khi } a < 0.$$

5) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn.} \end{cases}$

Một số tính chất của căn bậc n

Từ các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương, ta có thể chứng minh được các tính chất sau đây.

> Với hai số không âm a, b, hai số nguyên dương m, n và hai số nguyên p, q tuỳ ý, ta có
>
> 1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$;
>
> 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b > 0)$;
>
> 3) $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$ $(a > 0)$;
>
> 4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;
>
> 5) Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ $(a > 0)$.
>
> Đặc biệt $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$.

Các tính chất 1), 2), 3) đã được biết đến đối với căn bậc hai và căn bậc ba.

Ta chứng minh tính chất 5).

Giả sử $\sqrt[n]{a^p} = x$ và $\sqrt[m]{a^q} = y$. Vì $a > 0$ nên $x > 0$, $y > 0$.

Ta có $\quad x^n = a^p, \; y^m = a^q$. Do đó

$$x^{nq} = a^{pq} = y^{mp}.$$

Mặt khác, vì $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ nên $nq = mp$. Bởi vậy, từ $x^{nq} = y^{mp}$ và $x > 0$, $y > 0$, suy ra $x = y$.

Học sinh tự chứng minh tính chất 4). □

Ví dụ 3

a) $\sqrt[5]{8}.\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8.4} = \sqrt[5]{32} = 2.$ b) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}.$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = 3.$ d) $\sqrt[7]{128^3} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^3 = 2^3 = 8.$

e) $\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3]{2}.$

H4 *Chứng minh rằng*

a) Nếu n là số nguyên dương lẻ và a < b thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$;

b) Nếu n là số nguyên dương chẵn và 0 < a < b thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

b) Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

ĐỊNH NGHĨA 3

Cho a là một số thực dương và r là một số hữu tỉ. Giả sử $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên còn n là một số nguyên dương. Khi đó, luỹ thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Nhận xét. Từ tính chất 5) của căn bậc n, ta suy ra rằng số $a^r = a^{\frac{m}{n}}$ là xác định, không phụ thuộc vào phân số $\frac{m}{n}$ biểu diễn số hữu tỉ r, tức là nếu $r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ thì $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$. Do đó trong biểu thức a^r với r là một số hữu tỉ, ta thường viết r dưới dạng phân số tối giản có mẫu dương.

Ví dụ 4

a) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$; b) $27^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$.

c) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (a dương, n nguyên dương).

• Có thể chứng minh được rằng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ (của số thực dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu ở trên.

Ví dụ 5. Cho a, b là những số thực dương. Ta có

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.$$

Câu hỏi và bài tập

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Với số thực a và các số nguyên m, n, ta có

$$a^m.a^n = a^{m.n} \; ; \; \frac{a^m}{a^n} = a^{m:n}.$$

b) Với hai số thực a, b cùng khác 0 và số nguyên n, ta có

$$(ab)^n = a^n b^n \; ; \; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

c) Với hai số thực a, b thoả mãn $0 < a < b$ và số nguyên n, ta có

$$a^n < b^n.$$

d) Với số thực a khác 0 và hai số nguyên m, n, ta có

$$\text{Nếu } m > n \text{ thì } a^m > a^n.$$

2. Xét khẳng định :

"Với số thực a và hai số hữu tỉ r, s, ta có $(a^r)^s = a^{rs}$".

Với điều kiện nào trong các điều kiện sau thì khẳng định trên đúng ?

(A) a bất kì ; (B) $a \neq 0$; (C) $a > 0$; (D) $a < 1$.

3. Viết các số sau dưới dạng số nguyên hay phân số tối giản :

$$7^{-1}.14 \;; \quad \frac{4}{3^{-2}} \;; \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \;; \quad \frac{(-18)^2.5}{15^2.3}.$$

4. Thực hiện phép tính

a) $81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

b) $0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2}.64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2$;

c) $27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}$;

d) $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}$.

5. Đơn giản biểu thức (với a, b là những số dương)

a) $\dfrac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$;

b) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$.

6. So sánh các số :

a) $\sqrt{2}$ và $\sqrt[3]{3}$; b) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30}$ và $\sqrt[3]{63}$; c) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

7. Chứng minh $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2$.

Bài đọc thêm

TÍNH GẦN ĐÚNG CĂN BẬC *n* CỦA MỘT SỐ THẬP PHÂN BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI.

Có thể dùng máy tính bỏ túi chẳng hạn, máy tính CASIO *fx-500 MS* để tìm giá trị gần đúng căn bậc *n* của một số thập phân.

Ví dụ 1. Để tìm $\sqrt{23,425}$, ta ấn liên tiếp các phím sau :

$$\boxed{\sqrt{\ }}\ 2\ 3\ \boxed{.}\ 4\ 2\ 5\ \boxed{=}.$$

Khi đó, trên màn hình hiện số 4.839938016. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư, ta được

$$\sqrt{23,425} \approx 4,8399.$$

Ví dụ 2. Để tìm $\sqrt[3]{8,532}$, ta ấn liên tiếp các phím sau :

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}\ 8\ \boxed{.}\ 5\ 3\ 2\ \boxed{=}.$$

Trên màn hình hiện số 2.043385382. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư, ta được

$$\sqrt[3]{8,532} \approx 2,0434.$$

Lưu ý : Khi ấn liên tiếp hai phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ ta mới được phím $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$.

Ví dụ 3. Để tính $\sqrt[7]{320}$, ta ấn liên tiếp các phím sau :

$$7\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ 3\ 2\ 0\ \boxed{=}.$$

Trên màn hình hiện số 2.279704562. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư, ta được

$$\sqrt[7]{320} \approx 2,2797.$$

Lưu ý : Khi ấn liên tiếp ba phím 7 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$, ta mới được phím $\sqrt[7]{\ }$.

(Để tính $32^{3,2}$, ta ấn 3 2 $\boxed{\wedge}$ 3 $\boxed{.}$ 2 $\boxed{=}$. Trên màn hình hiện số 65,536.

Như vậy $32^{3,2} = 65536$.)

Luyện tập

8. Đơn giản biểu thức

a) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;

b) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

c) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$;

d) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1$.

9. Từ tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương, chứng minh

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \quad (a\geq 0,\ b\geq 0,\ n \text{ nguyên dương}).$$

10. Chứng minh

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$;

b) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

11. So sánh các số

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$ và $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$;

b) 3^{600} và 5^{400} ;

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$;

d) 7^{30} và 4^{40}.

§ 2 LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

1. Khái niệm luỹ thừa với số mũ thực

Ta đã định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ. Để định nghĩa luỹ thừa với số mũ thực tuỳ ý, ta còn phải định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ.

Cho số vô tỉ α. Ta thừa nhận rằng bao giờ cũng có một dãy số hữu tỉ $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ mà $\lim r_n=\alpha$. Chẳng hạn, với

$$\alpha=\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots$$

ta có dãy $r_1 = 1$; $r_2 = 1,4$; $r_3 = 1,41$; $r_4 = 1,414$; $r_5 = 1,4142$; $r_6 = 1,41421$; ... và $\lim r_n = \sqrt{2}$.

• Cho a là một số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ mà $\lim r_n = \alpha$. Khi đó, người ta chứng minh được rằng dãy số thực $a^{r_1}, a^{r_2}, ..., a^{r_n}, ...$ có giới hạn xác định (không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn, tức là nếu còn có dãy hữu tỉ (r_n') mà $\lim r_n' = \alpha$ thì $\lim a^{r_n} = \lim a^{r_n'}$). Ta gọi giới hạn đó là *luỹ thừa của a với số mũ α*, kí hiệu là a^α. Vậy

$$\boxed{a^\alpha = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}.}$$

Ví dụ 1

$\sqrt{2}$ là giới hạn của dãy số

1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,41421 ; ...

nên $10^{\sqrt{2}}$ là giới hạn của dãy số

10^1 ; $10^{1,4}$; $10^{1,41}$; $10^{1,414}$; $10^{1,4142}$; $10^{1,41421}$; ... .

Giá trị của $10^{\sqrt{2}}$ bằng 25,95455352... .

GHI NHỚ (về cơ số của luỹ thừa)

> 1) Khi xét luỹ thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số phải khác 0.
>
> 2) Khi xét luỹ thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương.

• Người ta chứng minh được rằng luỹ thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong §1.

Ví dụ 2

a) Với a là số dương, ta có

$$\frac{(a^{\sqrt{5}+1})^{\sqrt{5}-1}}{a^{7-\sqrt{2}}.a^{-3+\sqrt{2}}} = \frac{a^4}{a^4} = 1.$$

b) Để so sánh các số $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$, ta đưa về so sánh hai luỹ thừa cùng cơ số.

Ta có $16^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}}$, do đó ta so sánh $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$.

Vì $(2\sqrt{3})^2 = 2^2.3 = 12$, $(3\sqrt{2})^2 = 3^2.2 = 18$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$, do đó

$$4^{2\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}, \text{ tức là } 16^{\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}.$$

H1 *Tính* $\left(2^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3} . 2^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$.

2. Công thức lãi kép

Gửi tiền vào ngân hàng, ngoài thể thức lãi đơn (tức là tiền lãi của kì trước không được tính vào vốn của kì kế tiếp, nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra), còn có thể thức *lãi kép theo định kì*. Theo thể thức này, nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất r mỗi kì thì dễ thấy sau N kì số tiền người ấy thu được cả vốn lẫn lãi là :

$$C = A(1+r)^N. \qquad (1)$$

(Có thể chứng minh bằng quy nạp theo N).

Ví dụ 3. Theo thể thức lãi kép, một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng.

a) Nếu theo kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm thì sau 2 năm người đó thu được một số tiền là

$$10.(1 + 0{,}0756)^2 \approx 11{,}569 \text{ (triệu đồng).}$$

b) Nếu theo kì hạn 3 tháng với lãi suất 1,65% một quý thì sau 2 năm người đó thu được một số tiền là

$$10.(1 + 0{,}0165)^8 \approx 11{,}399 \text{ (triệu đồng).}$$

H2 *Một người đầu tư 100 triệu đồng vào một công ti theo thể thức lãi kép với lãi suất 13% một năm. Hỏi sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được bao nhiêu tiền lãi ? (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không đổi).*

Câu hỏi và bài tập

12. Xét mệnh đề : "Với các số thực x, a, b, nếu $0 < a < b$, thì $a^x < b^x$".

Với điều kiện nào sau đây của x thì mệnh đề đó là đúng ?

(A) x bất kì ; (B) $x > 0$; (C) $x < 0$.

13. Xét mệnh đề : "Với các số thực a, x, y, nếu $x < y$, thì $a^x < a^y$".

Với điều kiện nào sau đây của a thì mệnh đề đó là đúng ?

(A) a bất kì ; (B) $a > 0$; (C) $a > 1$.

14. Cho các số thực a, x, y với $x < y$. Hãy tìm điều kiện của a để $a^x > a^y$.

15. Tính giá trị các biểu thức

$$\left(0{,}5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} ; \qquad 2^{2-3\sqrt{5}}.8^{\sqrt{5}} ; \qquad 3^{1+2\sqrt[3]{2}}:9^{\sqrt[3]{2}}.$$

16. Đơn giản các biểu thức

$$\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.a^{4-\sqrt{5}}} ; \quad a^{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}.$$

17. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng ? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Luyện tập

18. Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa của một số với số mũ hữu tỉ :

a) $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$; b) $\sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$ $(a > 0, b > 0)$;

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$; d) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}}$ $(a > 0)$.

19. Đơn giản biểu thức

a) $a^{-2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$;

b) $\left(\frac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\frac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$;

c) $\frac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^2}+1$;

d) $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}$.

20. Tìm các số thực α, thoả mãn từng điều kiện sau :

a) $\frac{1}{2}(a^{\alpha}+a^{-\alpha})=1 \quad (a>0)$;

b) $3^{|\alpha|}<27$.

21. Giải các phương trình sau bằng cách đặt $t=\sqrt[4]{x}$:

a) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=2$;

b) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2=0$.

22. Giải các bất phương trình sau :

a) $x^4<3$;

b) $x^{11}\geq 7$;

c) $x^{10}>2$;

d) $x^3\leq 5$.

§ 3 LÔGARIT

Trong bài này chúng ta sẽ tìm hiểu một trong những phép toán quan trọng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn, đó là lôgarit.

1. Định nghĩa và ví dụ

Trước tiên, ta có những lưu ý sau về luỹ thừa của cơ số a :

Cho số a dương. Với mỗi số thực α tuỳ ý, ta luôn xác định được luỹ thừa a^{α}. Hơn nữa, ta có

a^{α} là một số dương ;

Nếu $a=1$ thì $a^{\alpha}=1^{\alpha}=1$ với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$;

Nếu $a > 1$ thì $a^{\alpha} < a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$;

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{\alpha} < a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.

Từ đó, suy ra

Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^{\alpha} = a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha = \beta$.

Ngược lại, ta thừa nhận rằng khi a là một số dương khác 1 thì với mỗi số dương b, có một số α để

$$a^{\alpha} = b.$$

Theo lưu ý ở trên, số α đó là duy nhất. Từ đó, ta có định nghĩa sau :

ĐỊNH NGHĨA 1

Cho a là một số dương khác 1 và b là một số dương. Số thực α để $a^{\alpha} = b$ được gọi là **lôgarit cơ số *a* của *b*** và kí hiệu là $\log_a b$, tức là

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

Ví dụ 1

$\log_{10} 100 = 2$ vì $10^2 = 100$; $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ vì $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$.

CHÚ Ý

1) Không có lôgarit của số 0 và số âm vì a^{α} luôn dương với mọi α.

2) Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

3) Theo định nghĩa lôgarit, ta có

$$\log_a 1 = 0, \ \log_a a = 1 ;$$

$$\log_a a^b = b, \forall b \in \mathbb{R} ; \quad (1)$$

$$a^{\log_a b} = b, \forall b \in \mathbb{R}, b > 0. \quad (2)$$

Hai công thức (1) và (2) nói lên rằng phép lấy lôgarit và phép nâng lên luỹ thừa là hai phép toán ngược của nhau. Cụ thể, với số a dương khác 1 ta có

Với mọi số thực b

$$b \xmapsto[\text{cơ số } a]{\text{nâng lên luỹ thừa}} a^b \xmapsto[\text{lấy lôgarit cơ số } a]{} \log_a a^b = b;$$

Với mọi số thực b dương

$$b \xmapsto[\text{lấy lôgarit cơ số } a]{} \log_a b \xmapsto[\text{cơ số } a]{\text{nâng lên luỹ thừa}} a^{\log_a b} = b.$$

Ví dụ 2

$$\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ ;\ \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2.$$

H1 *Tính*

a) $\log_2 \frac{1}{2}$; $\log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$; *b)* $9^{\log_3 12}$; $0{,}125^{\log_{0,5} 1}$.

H2 *Với giá trị nào của x thì* $\log_3(1-x) = 2$?

2. Tính chất

a) So sánh hai lôgarit cùng cơ số

Từ những lưu ý của mục 1, dễ dàng chứng minh được

ĐỊNH LÍ 1

> Cho số dương a khác 1 và các số dương b, c.
>
> 1) Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$;
>
> 2) Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Ta chứng minh 1).

Vì $a > 1$ nên, theo lưu ý của mục 1, ta có

$$\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow a^{\log_a b} > a^{\log_a c} \Leftrightarrow b > c.$$ □

H3 *Hãy chứng minh 2).*

Từ định lí 1, ta có

HỆ QUẢ

> Cho số a dương khác 1 và các số dương b, c.
>
> 1) Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.
>
> 2) Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.
>
> 3) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

Ví dụ 3. Hãy so sánh $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3}$ và $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5}$.

Giải. Vì $\frac{3}{5} < 1$ và $\frac{2}{3} < 1$ nên $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{3}{5}} 1 = 0$.

Vì $\frac{3}{2} > 1$ và $\frac{3}{5} < 1$ nên $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5} < \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$.

Từ đó suy ra $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5}$.

b) Các quy tắc tính lôgarit

Từ định nghĩa lôgarit và tính chất của luỹ thừa, ta suy ra các quy tắc tính lôgarit.

ĐỊNH LÍ 2

> Với số a dương khác 1 và các số dương b, c, ta có
>
> 1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;
>
> 2) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;
>
> 3) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

CHÚ Ý

Bằng quy nạp, suy ra rằng với các số dương $b_1, b_2, ..., b_n$, ta có

$$\log_a(b_1b_2...b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + ... + \log_a b_n.$$

H4 *Khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?*

$$\forall x \in (-\infty ; -1),\ \log_a(x^2 - 1) = \log_a(x+1) + \log_a(x-1).$$

Từ định lí 2 dễ dàng suy ra

HỆ QUẢ

Với số a dương khác 1, số dương b và số nguyên dương n, ta có

1) $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$;

2) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$.

Ví dụ 4

$$\frac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30} = \frac{\log_7 16}{\log_7 \frac{15}{30}} = \frac{\log_7 2^4}{\log_7 2^{-1}} = \frac{4\log_7 2}{-\log_7 2} = -4.$$

H5 *Tính* $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$.

3. Đổi cơ số của lôgarit

Trong tính toán, đôi khi ta cần biết mối liên hệ giữa những lôgarit với cơ số khác nhau.

Sau đây là công thức đổi cơ số của lôgarit.

ĐỊNH LÍ 3

Với a, b là hai số dương khác 1 và c là số dương, ta có

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad \text{hay} \quad \log_a b.\log_b c = \log_a c.$$

Chứng minh

Thật vậy, ta có $c = b^{\log_b c}$, từ đó

$$\log_a c = \log_a(b^{\log_b c}) = \log_b c . \log_a b.$$

Vì $b \neq 1$ nên $\log_a b \neq 0$, do đó

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$ □

Từ công thức đổi cơ số của lôgarit, với $c = a$, ta suy ra

HỆ QUẢ 1

> Với a và b là hai số dương khác 1, ta có
>
> $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ hay } \log_a b . \log_b a = 1.$$

Cũng trong công thức đổi cơ số đó, với $b = a^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$, ta có

HỆ QUẢ 2

> Với a là số dương khác 1, c là số dương và $\alpha \neq 0$, ta có
>
> $$\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} . \log_a c.$$

Ví dụ 5. $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 . \log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}}(2\log_3 2 . \log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{2^{-2}} 2$

$$= -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}.$$

H6 *Tìm x, biết* $\log_3 x + \log_9 x = \frac{3}{2}$.

Nhận xét. Nhờ công thức đổi cơ số của lôgarit, khi biết lôgarit cơ số a, ta có thể tính được lôgarit cơ số bất kì. Chẳng hạn, ta có thể tính được các lôgarit cơ số 2, cơ số 3, . . . theo lôgarit cơ số 10.

4. Lôgarit thập phân và ứng dụng

Trong thực hành ta hay dùng hệ đếm thập phân (hệ đếm cơ số 10) ; chính vì vậy lôgarit thập phân (lôgarit cơ số 10) chiếm một vị trí quan trọng trong tính toán. Năm 1617 người ta đã xây dựng được bảng lôgarit thập phân để tìm giá trị gần đúng lôgarit thập phân của một số thực dương bất kì (xem bài **Em có biết** "Về lịch sử phát minh lôgarit và bảng lôgarit" trang 91). Ngày nay thay vì dùng bảng, người ta thường dùng máy tính bỏ túi.

ĐỊNH NGHĨA 2

> Lôgarit cơ số 10 của một số dương x được gọi là **lôgarit thập phân của x** và kí hiệu là $\log x$ (hoặc là $\lg x$).

Lôgarit thập phân có đầy đủ các tính chất của lôgarit với cơ số lớn hơn 1.

• Trước khi có máy tính, để tính các luỹ thừa với số mũ phức tạp, người ta thường dùng phương pháp "lôgarit hoá" với lôgarit cơ số 10 và các tính toán được thực hiện nhờ bảng số.

Ví dụ 6. Để tính $2{,}1^{3{,}2}$ người ta làm như sau :

– Tính $\log 2{,}1^{3{,}2}$

$$\log 2{,}1^{3{,}2} = 3{,}2\log 2{,}1 \approx 1{,}0311 \;;$$

– Từ đó suy ra $2{,}1^{3{,}2} \approx 10^{1{,}0311} \approx 10{,}7424$. □

• Người ta còn dùng phương pháp "lôgarit hoá" và các tính chất của lôgarit để giải quyết một số bài toán liên quan đến luỹ thừa.

Ví dụ 7

Một người gửi 6 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử lãi suất không thay đổi) ?

Giải

Theo công thức lãi kép $C = A(1 + r)^N$, sau N năm gửi, người gửi sẽ có một số tiền là

$$6(1 + 0{,}0756)^N.$$

Từ đó, ta phải tìm N sao cho

$$12 = 6(1 + 0{,}0756)^N. \qquad (1)$$

Lấy lôgarit thập phân hai vế của đẳng thức (1), ta được

$$\log 12 = \log 6 + N \log 1{,}0756.$$

Suy ra $$N = \frac{\log 12 - \log 6}{\log 1{,}0756} \approx 9{,}51.$$

Vậy sau khoảng 10 năm người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số vốn 6 triệu đồng ban đầu.

• Rõ ràng khi $x = 10^n$ thì $\log x = n$. Còn với số $x \geq 1$ tuỳ ý, viết x trong hệ thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phảy của x là $n + 1$, trong đó n là phần nguyên của $\log x$, $n = [\log x]$.

Thật vậy, vì 10^n là số tự nhiên bé nhất có $n + 1$ chữ số nên số các chữ số đứng trước dấu phảy của x bằng $n + 1$ khi và chỉ khi $10^n \leq x < 10^{n+1}$, tức là $n \leq \log x < n + 1$; điều này chứng tỏ $n = [\log x]$.

Ví dụ 8. Để tìm số các chữ số của 2^{2008} khi viết trong hệ thập phân người ta lấy giá trị gần đúng của $\log 2$ là $0{,}3010$ và được

$$[2008.\log 2] + 1 = [2008.0{,}3010] + 1 = [604{,}408] + 1 = 605.$$

Vậy số 2^{2008} có 605 chữ số.

H7 *Khi viết 2^{1000} trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số ? (lấy giá trị gần đúng của $\log 2$ là $0{,}3010$).*

Câu hỏi và bài tập

23. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

a) Cơ số của lôgarit là một số thực bất kì ;

b) Cơ số của lôgarit phải là số nguyên ;

c) Cơ số của lôgarit phải là số nguyên dương ;

d) Cơ số của lôgarit phải là số dương khác 1.

24. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Có lôgarit của một số thực bất kì.

b) Chỉ có lôgarit của một số thực dương.

c) Chỉ có lôgarit của một số thực dương khác 1.

d) Chỉ có lôgarit của một số thực lớn hơn 1.

25. Điền thêm vế còn lại của đẳng thức và bổ sung điều kiện để có đẳng thức đúng.

a) $\log_a(xy) = \ldots$;   b) $\ldots = \log_a x - \log_a y$;

c) $\log_a x^\alpha = \ldots$;   d) $a^{\log_a b} = \ldots$.

26. Trong mỗi mệnh đề sau, hãy tìm điều kiện của a để có mệnh đề đúng :

a) $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow 0 < x < y$;

b) $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y > 0$.

27. Hãy tìm lôgarit của mỗi số sau theo cơ số 3 :

3 ; 81 ; 1 ; $\frac{1}{9}$; $\sqrt[3]{3}$; $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

28. Tính $\log_{\frac{1}{5}} 125$; $\log_{0,5}\frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{64}$; $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

29. Tính $3^{\log_3 18}$; $3^{5\log_3 2}$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5}$; $\left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0,5} 2}$.

30. Tìm x, biết

a) $\log_5 x = 4$;   b) $\log_2(5 - x) = 3$;

c) $\log_3(x + 2) = 3$;   d) $\log_{\frac{1}{6}}(0,5 + x) = -1$.

31. Biểu thị các lôgarit sau đây theo lôgarit thập phân (rồi cho kết quả bằng máy tính, làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) :

$\log_7 25$; $\log_5 8$; $\log_9 0,75$; $\log_{0,75} 1,13$.



VỀ LỊCH SỬ PHÁT MINH LÔGARIT VÀ BẢNG LÔGARIT

Lôgarit là phát minh của Nê-pe (J. Napier hay J. Neper 1550 – 1617) – một điền chủ và nhà thần học người Xcôt-len. Nê-pe bị toán học lôi cuốn và ông coi toán học là niềm vui giải trí của mình. Trong vòng 20 năm trời, những lúc rảnh rỗi, Nê-pe đã phát triển lí thuyết lôgarit và ông đã trình bày vấn đề này trong một cuốn sách viết bằng chữ La-tinh in năm 1614 với đầu đề "Mô tả một bảng lôgarit kì diệu" (từ "lôgarit" có gốc là những từ Hi Lạp : logos nghĩa là tỉ lệ, arithmos nghĩa là số). Ông hi vọng phát minh của mình sẽ giúp đơn giản hoá nhiều phép tính trong thiên văn, đó là những phép tính đòi hỏi nhiều công sức và thời gian.


John Napier
(1550 – 1617)

Thực tế, lôgarit của Nê-pe đã làm cuộc cách mạng trong thiên văn và trong nhiều lĩnh vực toán học bằng cách thay thế việc thực hiện "phép tính nhân, chia, tính căn bậc hai, căn bậc ba của những số lớn mà bên cạnh việc tiêu phí thời gian một cách tẻ nhạt, người ta còn hay bị nhầm lẫn" bằng thực hiện các phép tính cộng, trừ đơn giản những số tương ứng. Phát minh của Nê-pe là một phương thức tiết kiệm thời gian đáng kể.

Một số nhà sử học coi rằng việc sử dụng lôgarit để đơn giản các phép tính đã giúp nhà thiên văn người Đức Giô-han Kê-ple (J. Kepler) phát hiện ba quy luật chuyển động của hành tinh mà điều này lại giúp nhà vật lí người Anh Niu-tơn (I. Newton) phát hiện lí thuyết hấp dẫn. Sau phát minh của Nê-pe 200 năm, nhà toán học Pháp La-pla-xơ (P. Laplace) viết rằng : Lôgarit, bằng cách giảm bớt công sức tính toán, đã kéo dài tuổi thọ gấp hai lần cho các nhà thiên văn.

Các bảng lôgarit ban đầu của Nê-pe còn nhiều khiếm khuyết. Một nhà toán học người Anh là Hen-ry Bric (H. Briggs) đọc công trình của Nê-pe (bằng chữ La-tinh) ngay sau khi nó được công bố, lập tức thấy được ý nghĩa của phát minh kì diệu này. Bric viết thư cho Nê-pe đề nghị gặp gỡ trao đổi và nêu ra nhiều cải tiến cho phát minh đó. Hai nhà toán học gặp nhau vào mùa hè năm 1615. Bric đề nghị định nghĩa lại lôgarit thập phân (lôgarit cơ số 10). Thực ra, Nê-pe có nghĩ đến dùng cơ số 10 nhưng đã không đủ sức làm nên các bảng mới. Nê-pe đề nghị Bric xây dựng các bảng như thế.

Sau đó hai năm, các bảng lôgarit thập phân đầu tiên đã được Bric xây dựng. Nê-pe mất năm 1617 trước khi Bric hoàn thành các bảng đó. Nhiều nhà toán học đã tiếp tục xây dựng các bảng lôgarit thập phân trong đó có bảng của Bra-đi-xơ mà ngày nay chúng ta vẫn còn dùng.

Khi viết số thập phân dương a dưới dạng kí hiệu khoa học $a = \alpha.10^n$, với $1 \le \alpha < 10, n \in \mathbb{Z}$ thì

$$\log a = \log \alpha + n. \qquad (1)$$

Như vậy, chỉ cần biết $\log \alpha$ với mọi α thuộc [1 ; 10) thì sẽ tính được lôgarit thập phân của một số thập phân dương bất kì. Người ta gọi $\log \alpha$ trong (1) là *phần định trị*, *n* là *phần đặc tính* của $\log a$. Trong các bảng số, người ta cho sẵn giá trị gần đúng phần định trị $\log \alpha$. Bảng của Bra-đi-xơ cho $\log \alpha$ với bốn chữ số thập phân.

Ví dụ. Cho biết $\log 2,319 \approx 0,3653$. Tính $\log 23,19$ và $\log 0,2319$.

Giải

$\log 23,19 = \log(2,319.10) = \log 2,319 + 1 \approx 0,3653 + 1 = 1,3653$;

$\log 0,2319 = \log(2,319.10^{-1}) = \log 2,319 - 1$

$\approx 0,3653 - 1 = -0,6347$.

Luyện tập

32. Hãy tính :

a) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

b) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

c) $\dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$;

d) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3}$.

33. Hãy so sánh :

a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$;

b) $3^{\log_6 1,1}$ và $7^{\log_6 0,99}$.

34. Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh :

a) $\log 2 + \log 3$ với $\log 5$;

b) $\log 12 - \log 5$ với $\log 7$;

c) $3\log 2 + \log 3$ với $2\log 5$;

d) $1 + 2\log 3$ với $\log 27$.

35. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tính $\log_a x$, biết $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$:

a) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$;

b) $x = \dfrac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

36. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm x :

a) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$; b) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$.

37. Hãy biểu diễn các lôgarit sau qua α và β:

a) $\log_{\sqrt{3}} 50$, nếu $\log_3 15 = \alpha$, $\log_3 10 = \beta$;

b) $\log_4 1250$, nếu $\log_2 5 = \alpha$.

38. Đơn giản các biểu thức sau :

a) $\log\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\log 4 + 4\log\sqrt{2}$; b) $\log\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\log 36 + \frac{3}{2}\log\frac{9}{2}$;

c) $\log 72 - 2\log\frac{27}{256} + \log\sqrt{108}$; d) $\log\frac{1}{8} - \log 0,375 + 2\log\sqrt{0,5625}$.

39. Tìm x, biết :

a) $\log_x 27 = 3$; b) $\log_x \frac{1}{7} = -1$; c) $\log_x \sqrt{5} = -4$.

40. Số nguyên tố dạng $M_p = 2^p - 1$, trong đó p là một số nguyên tố được gọi là số nguyên tố Mec-xen (M. Mersenne, 1588 – 1648, người Pháp).

Ơ-le phát hiện M_{31} năm 1750.

Luy-ca (E. Lucas, 1842 - 1891, người Pháp) phát hiện M_{127} năm 1876.

$M_{1398269}$ được phát hiện năm 1996.

Hỏi rằng nếu viết ba số đó trong hệ thập phân thì mỗi số có bao nhiêu chữ số ?

(Dễ thấy rằng số chữ số của $2^p - 1$ bằng số chữ số của 2^p và để tính số chữ số của M_{127} có thể lấy $\log 2 \approx 0,30$ và để tính số chữ số của $M_{1398269}$ có thể lấy $\log 2 \approx 0,30103$ (xem ví dụ 8)).

41. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu ? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

§ 4 SỐ e VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

Cho đến bây giờ, dường như π là số vô tỉ quan trọng nhất mà ta biết đến. Trong bài này, ta sẽ được biết thêm một số vô tỉ cũng quan trọng không kém, đó là số e. Số e là giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, xấp xỉ bằng 2,718281828... ; nó xuất hiện một cách tự nhiên trong Toán học, cũng như trong đời sống. Chính vì vậy lôgarit cơ số e còn được gọi là lôgarit tự nhiên. Trong các máy tính bỏ túi, người ta đều thiết kế các phím bấm cho phép tính giá trị của các biểu thức e^x và $\log_e x$ (còn kí hiệu là $\ln x$).

1. Lãi kép liên tục và số e

Ta đã biết : Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là A với lãi suất mỗi năm là r theo thể thức lãi kép thì sau N năm gửi số tiền thu về cả vốn lẫn lãi sẽ là $A(1 + r)^N$.

Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì để tính lãi và giữ nguyên lãi suất mỗi năm là r thì lãi suất mỗi kì là $\frac{r}{m}$ và số tiền thu được sau N năm (hay sau Nm kì) là $A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{Nm}$.

H1 *Cho $A = 100$ triệu đồng, $r = 8\%$ năm, $N = 2$. Dùng máy tính bỏ túi tính số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sau 2 năm theo các định kì sau đây :*

$m = 1$ (định kì năm) ; $m = 2$ (định kì 6 tháng) ;

$m = 4$ (định kì quý) ; $m = 12$ (định kì tháng) ;

$m = 52$ (định kì tuần) ; $m = 365$ (định kì ngày).

Hiển nhiên khi tăng số kì m trong một năm thì số tiền thu được sau N năm (tức Nm kì) cũng tăng theo. Tuy nhiên như ta thấy sau đây, nó không thể tăng lên vô hạn được.

Thật vậy, xét giới hạn của dãy số sau (trong đó A, r, N là cố định)

$$S_m = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm}.$$

Ta có

$$S_m = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = A\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{Nr}. \quad (1)$$

Để xét giới hạn của dãy (1), cần xét giới hạn

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}.}$$

Một cách tổng quát , ta xét giới hạn

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.}$$

Người ta chứng minh được giới hạn trên tồn tại, nó là một số vô tỉ có giá trị bằng 2,718281828... và được kí hiệu là e. Vậy

$$\mathrm{e} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \approx 2{,}7183. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), người ta suy ra $\lim S_m = A\mathrm{e}^{Nr}$. □

- Thể thức tính lãi khi $m \to +\infty$ gọi là thể thức *lãi kép liên tục*.

Như vậy với số vốn ban đầu là A, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất mỗi năm là r thì sau N năm số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$S = A\mathrm{e}^{Nr}. \quad (3)$$

Công thức (3) được gọi là *công thức lãi kép liên tục*.

Ví dụ 1. Với số vốn 100 triệu đồng gửi vào ngân hàng theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất 8% năm thì sau 2 năm số tiền thu về cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$100.e^{2.0,08} \approx 117,351087 \quad \text{(triệu đồng).} \qquad \square$$

• Nhiều hiện tượng tăng trưởng (hoặc suy giảm) của tự nhiên và xã hội, chẳng hạn sự tăng dân số, cũng được ước tính theo công thức (3). Vì vậy công thức (3) còn được gọi là *công thức tăng trưởng mũ.*

Ví dụ 2. Sự tăng dân số được ước tính theo công thức (3), trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm (xem bài đọc thêm "Sự tăng trưởng (hay suy giảm) mũ" trang 110). Biết rằng tỉ lệ tăng dân số thế giới hàng năm là 1,32%, năm 1998 dân số thế giới vào khoảng 5926,5 triệu người. Khi đó dự đoán dân số thế giới năm 2008 (10 năm sau) sẽ là

$$5926,5.e^{10.0,0132} \approx 6762,8 \text{ (triệu người).}$$

2. Lôgarit tự nhiên

ĐỊNH NGHĨA

Lôgarit cơ số e của một số dương a được gọi là ***lôgarit tự nhiên*** (hay lôgarit Nê-pe) của số a và kí hiệu là $\ln a$.

Lôgarit tự nhiên có đầy đủ các tính chất của lôgarit với cơ số lớn hơn 1.

H2 *a) Dùng công thức đổi cơ số, hãy so sánh* $\log x$ *và* $\ln x$ *tuỳ theo các giá trị của x.*

b) Tính giá trị của biểu thức $\log e^{2\ln\sqrt{10}} - \ln 10^{\log e^{-3}}$.

Ví dụ 3. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7% và sự tăng dân số được ước tính theo công thức (3).

Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người ?

Giải. Theo bài ra, ta có

$$100 = 78,6858.e^{0,017N}. \qquad (*)$$

Lấy lôgarit tự nhiên hai vế của (*) ta được

$$\ln 100 = \ln\left(78,6858.e^{0,017N}\right).$$

Từ đó suy ra

$$N = \frac{\ln 100 - \ln 78,6858}{0,017} \approx 14.$$

Vậy nếu cứ tăng dân số với tỉ lệ hàng năm là 1,7% thì đến năm 2015 dân số nước ta sẽ ở mức 100 triệu người.

Câu hỏi và bài tập

42. Tìm sai lầm trong lập luận sau :

Ta có $\ln e^2 = 2\ln e = 2.1 = 2$ và $\ln(2e) = \ln e + \ln e = 1 + 1 = 2$. Từ đó suy ra $e^2 = 2e$, mà $e \neq 0$ nên $e = 2$!

43. Biểu diễn các số sau đây theo $a = \ln 2$, $b = \ln 5$:

$\ln 500$; $\ln\frac{16}{25}$; $\ln 6,25$; $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + ... + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$.

44. Chứng minh

$$\frac{7}{16}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2} - 1) = 0.$$

45. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau 10 giờ có bao nhiêu con vi khuẩn ? Sau bao lâu số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi ?

46. Cho biết chu kì bán huỷ của chất phóng xạ plutôni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân huỷ thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân huỷ được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân huỷ hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân huỷ, S là lượng còn lại sau thời gian phân huỷ t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm phân huỷ sẽ còn 1 gam ?

Bài đọc thêm

SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI ĐỂ TÍNH LUỸ THỪA VÀ LÔGARIT

Có thể dùng máy tính bỏ túi, chẳng hạn máy tính CASIO *fx - 500 MS*, để tính luỹ thừa của 10, của e cũng như lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên của một số.

Ví dụ 1. Tính $\log 5,63$.

Để tính $\log 5,63$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[log] 5 [.] 6 3 [=].

Khi đó, trên màn hình hiện số

0.750508395.

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư thì

$$\log 5,63 \approx 0,7505.$$

Ví dụ 2. Tính $10^{-2,13}$.

Để tính $10^{-2,13}$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[SHIFT] [10^x] [(−)] 2 [.] 1 3 [=].

Khi đó, trên màn hình hiện số

0.007413102.

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư thì

$$10^{-2,13} \approx 0,0074.$$

Ví dụ 3. Tính $\ln 4,83$.

Để tính $\ln 4,83$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[ln] 4 [.] 8 3 [=].

Trên màn hình hiện số

1.574846468.

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư thì

$$\ln 4,83 \approx 1,5748.$$

Ví dụ 4. Tính $e^{\sqrt{5}}$.

Để tính $e^{\sqrt{5}}$, ta ấn lần lượt các phím sau :

[SHIFT] [e^x] [$\sqrt{\ }$] 5 [=].

Trên màn hình hiện số

$$9.356469017.$$

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư thì

$$e^{\sqrt{5}} \approx 9,3565.$$



LÔGARIT TRONG MỘT SỐ CÔNG THỨC ĐO LƯỜNG

a) Độ pH trong hoá học

• Trong mỗi dung dịch, nồng độ ion hiđrô $[H_3O^+]$ đặc trưng cho tính axit, nồng độ hiđrôxyn $[OH^-]$ đặc trưng cho tính bazơ (kiềm), (nồng độ tính bằng mol/*l*).

Ở 25°C, tích $[H_3O^+] \times [OH^-]$ là một hằng số và bằng 10^{-14} (đối với mọi dung dịch). Nước tinh khiết ở 25°C có $[H_3O^+] = [OH^-] = 10^{-7}$. Nếu nồng độ $[H_3O^+]$ lớn hơn 10^{-7} thì dung dịch có tính axit, nồng độ $[H_3O^+]$ nhỏ hơn 10^{-7} thì dung dịch có tính kiềm.

Vì các nồng độ này là những số rất nhỏ nên để đặc trưng tính axít (tính bazơ) của một dung dịch, người ta xét chỉ số (hay độ) pH,

$$pH = -\log[H_3O^+].$$

(pH là chữ đầu của nhóm từ "potential of hydrogen" có nghĩa là tiềm lực của hiđrô). Như vậy

$pH < 7$ nói lên rằng dung dịch có tính axit ;

$pH > 7$ nói lên rằng dung dịch có tính bazơ ;

$pH = 7$ chứng tỏ dung dịch là trung tính.

Ví dụ

Bia có $[H_3O^+] = 0{,}00008$, do đó có độ pH là

$$pH = -\log 0{,}00008 = 5 - \log 8 < 7.$$

Rượu có $[H_3O^+] = 0{,}0004$, do đó có độ pH là

$$pH = -\log 0{,}0004 = 4 - \log 4 < 7.$$

Như vậy, bia và rượu đều có tính axít, nhưng tính axít của rượu lớn hơn tính axít của bia.

• Trong thực tế, ngành thổ nhưỡng rất quan tâm đến độ pH của một vùng đất để tìm ra biện pháp cải tạo đất và chọn giống cây trồng thích hợp.

b) Độ chấn động trong địa vật lí

• Độ chấn động M của một địa chấn biên độ I được đo trong thang độ Richte (C. F. Richter, nhà địa vật lí Mĩ, 1900 – 1985) xác định bởi

$$M = \ln \frac{I}{I_0}$$

(I_0 là biên độ của dao động bé hơn 1μm trên máy đo địa chấn, đặt cách tâm địa chấn 100km, I_0 được lấy làm chuẩn).

• Ở 3 độ Richte, địa chấn chỉ có ảnh hưởng trong một vùng diện tích nhỏ ; ở 4 đến 5 độ Richte, địa chấn gây một số thiệt hại nhỏ ; ở 6 đến 8 độ Richte, địa chấn gây một số thiệt hại lớn ; ở 9 độ Richte, thiệt hại là cực kì lớn.

• Năng lượng giải toả E tại tâm địa chấn ở M độ Richte được xác định xấp xỉ bởi công thức

$$\log E \approx 11,4 + 1,5M .$$

Từ đó, chẳng hạn, ở 8 độ Richte, địa chấn có năng lượng giải toả gấp khoảng 30000 lần địa chấn ở 5 độ Richte (địa chấn ở 5 độ Richte có năng lượng giải toả khoảng 2.10^{18} jun).

c) Độ to nhỏ của âm

Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm *mức cường độ của âm*. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đêxiben (viết tắt là dB) (G. Bell, 1847 – 1922, nhà vật lí Mĩ gốc Anh).

Mức cường độ L của âm được tính theo công thức :

$$L(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

trong đó I là cường độ của âm, tức là năng lượng truyền đi bởi sóng âm trong một đơn vị thời gian và qua một đơn vị diện tích bề mặt vuông góc với phương sóng truyền (đơn vị đo là W/m^2) ; I_0 là cường độ của âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2). Công thức trên cho thấy : Khi cường độ của âm tăng lên 10^2, 10^3, ... lần thì cảm giác về độ to nhỏ của âm tăng lên gấp 2, 3, ... lần.

Chú ý rằng nếu thường xuyên nghe tiếng ồn khoảng 90dB thì có nguy cơ bị giảm thính lực, thậm chí bị điếc (xem bài tập 52 tr. 112).

§ 5 HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Trong bài này, ta luôn giả thiết a là một số dương và khác 1 ($0 < a \neq 1$) đã cho, J là một khoảng hay hợp của nhiều khoảng nào đó.

1. Khái niệm hàm số mũ và hàm số lôgarit

Từ định nghĩa luỹ thừa và lôgarit, ta thấy :

- Với mỗi giá trị thực của x, ta luôn xác định được một giá trị a^x (duy nhất).
- Với mỗi giá trị thực dương của x, ta luôn xác định được một giá trị $\log_a x$ (duy nhất).

Từ đó, ta có hàm số $y = a^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = \log_a x$ xác định trên $\mathbb{R}_+^* = (0 ; +\infty)$.

ĐỊNH NGHĨA

> Giả sử a là một số dương và khác 1.
>
> Hàm số dạng $y = a^x$ được gọi là *hàm số mũ cơ số a.*
>
> Hàm số dạng $y = \log_a x$ được gọi là *hàm số lôgarit cơ số a.*

Khi không cần nhấn mạnh cơ số, hàm số mũ cơ số a còn gọi tắt là *hàm số mũ*[1] ; hàm số lôgarit cơ số a còn gọi tắt là *hàm số lôgarit*.

Ta cũng dùng kí hiệu $y = \log x$ (hoặc $\lg x$) để chỉ hàm số lôgarit cơ số 10 và kí hiệu $y = \ln x$ để chỉ hàm số lôgarit cơ số e. Trong nhiều tài liệu, hàm số $y = e^x$ còn được kí hiệu là $y = \exp(x)$.

2. Một số giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

a) Ta thừa nhận rằng các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ liên tục tại mọi điểm mà nó xác định, tức là

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0},$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0 .$$

---

(1) Có tài liệu coi hàm số mũ là hàm số có dạng $y = ka^x$, trong đó k là hằng số khác 0.

H1 *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 8} \log_2 x$; *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \log\left|\frac{\sin x}{x}\right|$.

b) Ta đã biết $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \text{e}$. Ngoài ra ta còn có $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \text{e}$. Từ đó, bằng cách đổi biến (đặt $\frac{1}{t} = x$) ta được

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \text{e}. \qquad (1)$$

Sử dụng (1), ta dễ dàng chứng minh được hai giới hạn quan trọng sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{e}^x - 1}{x} = 1. \qquad (3)$$

Chứng minh. Ta có.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Khi x dần đến 0 thì $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \text{e}$ nên do tính liên tục của hàm số lôgarit, ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \text{e} = 1.$$

Vậy (2) được chứng minh.

Để chứng minh (3), ta đặt $t = \text{e}^x - 1$. Khi đó ta có $x = \ln(1+t)$, và $x \to 0$ khi và chỉ khi $t \to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{e}^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^{-1} = 1.$$

Vậy (3) được chứng minh. □

3. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Dưới đây, chúng ta sẽ chứng tỏ rằng hàm số mũ và hàm số lôgarit có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

a) Đạo hàm của hàm số mũ

ĐỊNH LÍ 2

a) Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ và

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \text{ ; nói riêng ta có } \left(e^x\right)' = e^x.$$

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = a^{u(x)}$ có đạo hàm trên J và

$$\left(a^{u(x)}\right)' = u'(x)a^{u(x)}\ln a \text{ ; nói riêng ta có } \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}.$$

Chứng minh

a) Trước hết ta xét hàm số $y = e^x$. Giả sử x là một số tuỳ ý. Kí hiệu Δx là số gia của biến số tại x và Δy là số gia của hàm số tương ứng với nó, ta có

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \quad \text{(theo (3))}.$$

Vậy $\left(e^x\right)' = e^x$ với mọi x.

Đối với hàm số $y = a^x$, ta có $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$ nên theo công thức đạo hàm của hàm số hợp, ta có

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \ln a \quad (\text{với mọi } x \in \mathbb{R}).$$

b) Kết luận này suy ra từ phần a) của định lí và công thức đạo hàm của hàm số hợp. □

Ví dụ 1. Với $y = (x^2 + 1)e^x$, ta có

$$y' = (x^2 + 1)' e^x + (x^2 + 1)(e^x)' = (2x + x^2 + 1)\, e^x = (x + 1)^2 e^x.$$

H2 *Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau :*

a) $y = (x + 1)e^{2x}$; *b)* $y = e^{\sqrt{x}} \sin x$.

b) Đạo hàm của hàm số lôgarit

ĐỊNH LÍ 3

a) Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \text{ ; nói riêng ta có } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên J thì hàm số $y = \log_a u(x)$ có đạo hàm trên J và

$$\left(\log_a u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a} \text{ ; nói riêng ta có } (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Chứng minh

a) Trước hết ta xét hàm số $y = \ln x$. Giả sử x là một số dương tuỳ ý. Kí hiệu Δx là số gia của biến số tại x và Δy là số gia của hàm số tương ứng với nó, ta có

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \quad \text{(theo (2))}.$$

Vậy $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ với mọi $x > 0$.

Đối với hàm số $y = \log_a x$, ta có

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a} \text{ (với mọi } x > 0\text{)}.$$

b) Kết luận này suy ra từ phần a) của định lí và công thức đạo hàm của hàm số hợp □

Ví dụ 2. Đối với hàm số $y = \ln(x^2 - x + 1)$, ta có

$$y' = \frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}.$$

H3 *Chứng minh rằng* $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ *với mọi* $x < 0$.

HỆ QUẢ

a) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$.

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị khác 0 và có đạo hàm trên J thì

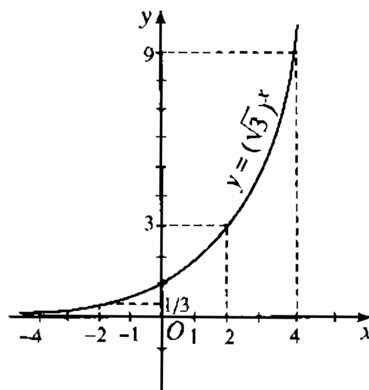
$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ với mọi } x \in J.$$

Hệ quả này được suy ra từ định lí 3 và kết quả của **H3**.

4. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit

a) Hàm số $y = a^x$

Ta đã biết hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Để khảo sát sự biến thiên của nó, ta cần xét dấu của đạo hàm $y' = a^x \ln a$. Do $a^x > 0$ với mọi x nên dấu của y' trùng với dấu của $\ln a$. Mặt khác, theo tính chất của lôgarit ta có $\ln a > 0$ khi $a > 1$ và $\ln a < 0$ khi $0 < a < 1$. Bởi vậy, ta xét hai trường hợp :



Hình 2.1

• *Trường hợp* $a > 1$

Trong trường hợp này ta có $\ln a > 0$ nên $y' > 0$ với mọi x. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Người ta còn chứng minh được rằng $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ và

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0. \quad (4)$$

Giới hạn (4) chứng tỏ đồ thị của hàm số $y = a^x$ có tiệm cận ngang (khi $x \to -\infty$) là trục hoành.

Ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$y = a^x$ $(a > 1)$	0 ↗ 1 ↗ $+\infty$

Hàm số $y = a^x$ nhận mọi giá trị thuộc khoảng $(0 ; +\infty)$.

Hình 2.1 thể hiện đồ thị của hàm số $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. Đồ thị của các hàm số mũ với cơ số $a > 1$ cũng có dạng tương tự. Chúng có chung các đặc điểm đáng chú ý sau đây :

(i) Luôn cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 (vì ta luôn có $a^0 = 1$) ;

(ii) Nằm hoàn toàn ở phía trên của trục hoành (vì $a^x > 0$ với mọi x).

• *Trường hợp* $0 < a < 1$

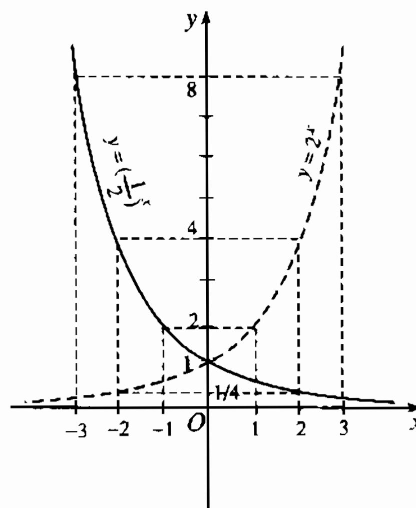
Trong trường hợp này, người ta cũng chứng minh được rằng $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ và

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0. \qquad (5)$$

H4 *a) Dựa vào (5), hãy nêu kết luận về đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số* $y = a^x$.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = a^x$ *với* $0 < a < 1$.

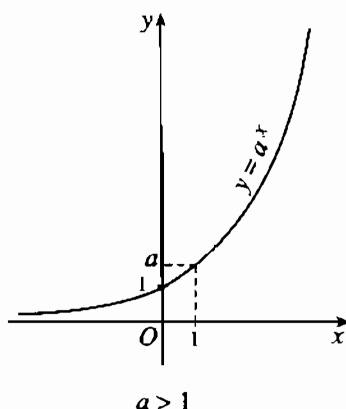
Trên hình 2.2, đường nét liền thể hiện đồ thị của hàm số $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Dễ thấy đồ thị này cũng có các đặc điểm (i) và (ii) như trong trường hợp $a > 1$.



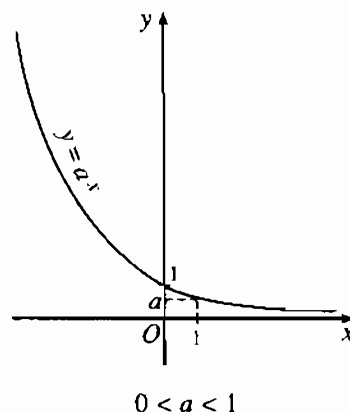
Hình 2.2

GHI NHỚ

> Hàm số $y = a^x$
>
> * Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là khoảng $(0 ; +\infty)$;
>
> * Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$;
>
> * Có đồ thị :
>
> – Đi qua điểm $(0 ; 1)$,
>
> – Nằm ở phía trên trục hoành,
>
> – Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.
>
> Đồ thị có một trong hai dạng nêu ở hình 2.3.



$a > 1$



$0 < a < 1$

Hình 2.3

b) Hàm số $y = \log_a x$

Ta đã biết hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là khoảng $(0 ; +\infty)$ và trên khoảng đó nó có đạo hàm là $y' = (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

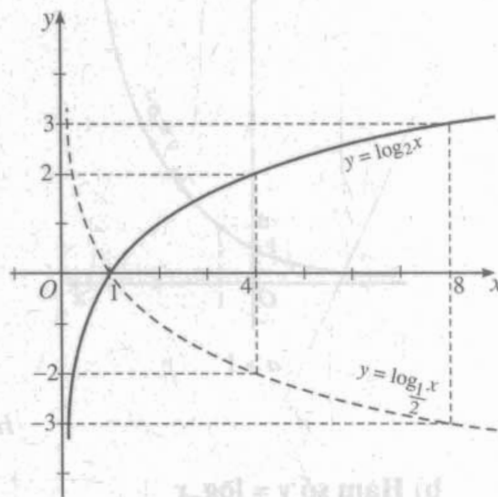
Tương tự hàm số mũ, để xét dấu của đạo hàm, ta xét hai trường hợp : $a > 1$ và $0 < a < 1$.

Một số kết quả khảo sát hàm số $y = \log_a x$ được ghi lại trong bảng sau :

Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$	Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$
• $y' > 0$ với mọi $x \in (0\ ;+\infty)$ • Hàm số đồng biến trên $(0\ ;+\infty)$ và nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{R}$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ (6) • $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$	• $y' < 0$ với mọi $x \in (0\ ;+\infty)$ • Hàm số nghịch biến trên $(0\ ;+\infty)$ và nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{R}$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ (7) • $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$

Các giới hạn (6) và (7) chứng tỏ rằng trong cả hai trường hợp, đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ đều có tiệm cận đứng (khi $x \to 0^+$) là trục tung.

Trên hình 2.4, đường nét liền thể hiện đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$ (các hàm số lôgarit cơ số a với $a > 1$ có dạng tương tự), đường nét đứt thể hiện đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (các hàm số lôgarit cơ số a với $0 < a < 1$ có dạng tương tự). Chúng có chung những đặc điểm đáng chú ý sau :



Hình 2.4

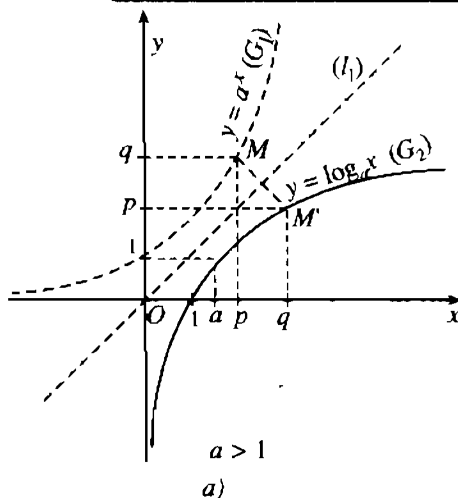
(i) Luôn cắt trục hoành tại điểm $(1\ ;0)$ (vì $\log_a 1 = 0$ với mọi a) ;

(ii) Nằm hoàn toàn về bên phải trục tung (vì $\log_a x$ chỉ xác định khi $x > 0$).

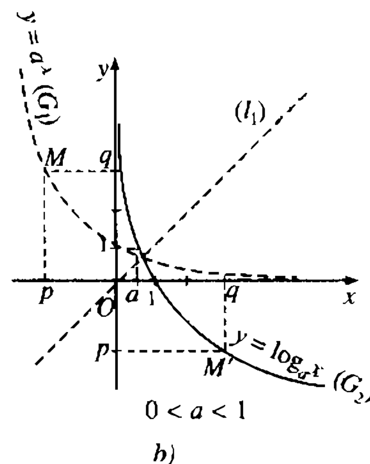
H5 *Dựa vào bảng trên, hãy lập bảng biến thiên của hàm số $y = \log_a x$ trong mỗi trường hợp $a > 1$ và $0 < a < 1$. Kiểm nghiệm các tính chất được nêu trong bảng đó qua đồ thị hình 2.5.*

GHI NHỚ

> Hàm số $y = \log_a x$
>
> * Có tập xác định là khoảng $(0 ; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
>
> * Đồng biến trên $(0 ; +\infty)$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$ khi $0 < a < 1$;
>
> * Có đồ thị
>
>   – Đi qua điểm $(1 ; 0)$,
>
>   – Nằm ở bên phải trục tung,
>
>   – Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.
>
> Đồ thị có một trong hai dạng nêu ở hình 2.5 (đường liền nét).



a)



b)

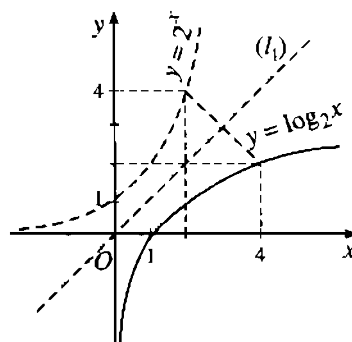
Hình 2.5

Nhận xét

Nếu gọi (G_1) là đồ thị của hàm số $y = a^x$ và (G_2) là đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ thì (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường phân giác (l_1) của góc phần tư thứ nhất.

Thật vậy, xét điểm $M(p ; q)$ bất kì, điểm đối xứng với M qua (l_1) là điểm $M'(q ; p)$, ta có (h.2.5) :

$$M(p ; q) \in (G_1) \Leftrightarrow q = a^p \Leftrightarrow p = \log_a q$$
$$\Leftrightarrow M'(q ; p) \in (G_2).$$



Hình 2.6

Điều đó đã chứng minh nhận xét trên. Ta cũng có thể kiểm nghiệm lại nhận xét này đối với hai hàm số $y = \log_2 x$ và $y = 2^x$ (h. 2.6) bằng cách gấp tờ giấy theo đường (l_1).

Bài đọc thêm

SỰ TĂNG TRƯỞNG (HAY SUY GIẢM) MŨ

1. Thế nào là tăng trưởng (hay suy giảm) mũ ?

Trong bài học §4, ta đã làm quen với vấn đề lãi kép liên tục. Trong thực tế, nhiều hiện tượng tự nhiên, xã hội có tính chất tăng trưởng (hay suy giảm) tương tự như vấn đề lãi kép liên tục, chẳng hạn: vấn đề tăng trưởng dân số, vấn đề sinh sôi của vi trùng, vấn đề phân huỷ của các chất phóng xạ,... Các vấn đề trên được gọi là vấn đề *tăng trưởng (hay suy giảm) mũ*.

Về thực chất, sự tăng trưởng (hay suy giảm) mũ được đặc trưng bởi một hàm số mà đạo hàm của nó tại mỗi điểm đều tỉ lệ với giá trị của hàm số tại điểm đó với hệ số tỉ lệ không đổi, tức là hàm số $y = f(x)$ thoả mãn điều kiện

$$f'(x) = kf(x) \qquad (1)$$

(xét trên một khoảng nào đó) trong đó k là một hằng số khác 0 nào đó. Số k được gọi là *tỉ lệ tăng trưởng* khi $k > 0$ và được *gọi là tỉ lệ suy giảm* khi $k < 0$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x)$ thoả mãn điều kiện (1) khi và chỉ khi nó có dạng

$$y = Ce^{kx} \text{ (với } C \text{ là hằng số tuỳ ý).} \qquad (2)$$

Thật vậy, dễ thấy hàm số $y = Ce^{kx}$ (C là hằng số) luôn thoả mãn điều kiện (1).

Ngược lại, giả sử $y = f(x)$ là hàm số thoả mãn điều kiện (1).

Khi đó, nếu đặt $C(x) = \dfrac{f(x)}{e^{kx}}$, tức là $f(x) = C(x)e^{kx}$ thì theo (1) ta có :

$$f'(x) = C'(x)e^{kx} + C(x)ke^{kx} = C'(x)e^{kx} + kf(x) = kf(x).$$

Từ đó suy ra $C'(x)e^{kx} = 0$. Tức là $C'(x) = 0$ (với mọi x thuộc khoảng đang xét). Vậy $C(x)$ phải là một hằng số C nào đó và do đó $f(x) = Ce^{kx}$. □

Dễ thấy C là giá trị của hàm số f tại $x = 0$ nên C còn được gọi là giá trị ban đầu. Trong công thức lãi kép liên tục thì giá trị ban đầu chính là số vốn ban đầu gửi vào ngân hàng $(C = A)$, k là lãi suất mỗi năm $(k = r)$ và x là số năm gửi $(x = N)$.

2. Chu kì bán huỷ (bán rã) của chất phóng xạ

Trong công thức (2), nếu $k < 0$ thì hàm số $y = Ce^{kx}$ mô tả sự suy giảm mũ. Một ví dụ điển hình cho sự suy giảm mũ là sự phân huỷ của các chất phóng xạ.

Giả sử có một lượng chất phóng xạ ban đầu là u_0, lượng chất phóng xạ còn lại tại thời điểm t là

$$u(t) = u_0 e^{kt}$$

trong đó $k < 0$ là hệ số suy giảm (trong Vật lí, số $|k|$ gọi là hằng số phóng xạ)

Ta đặt $u_1 = u(t_1)$ và $u_2 = u(t_2)$ và xét tỉ số

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_0 e^{kt_2}}{u_0 e^{kt_1}} = e^{k(t_2 - t_1)}.$$

Kết quả đó chứng tỏ rằng tỉ số giữa hai lượng phóng xạ còn lại tại hai thời điểm t_2 và t_1 chỉ phụ thuộc vào hiệu số $t_2 - t_1$ mà thôi. Điều đó cho phép người ta đưa ra một khái niệm gọi là *chu kì bán huỷ* (*bán rã*) của chất phóng xạ, đó là khoảng thời gian mà lượng chất phóng xạ đó phân huỷ đi chỉ còn lại một nửa. Nói cách khác, chu kì bán huỷ là khoảng thời gian $s = t_2 - t_1$ sao cho

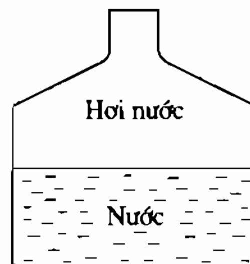
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} = e^{ks}. \qquad (3)$$

Từ (3) ta có $s = \frac{-\ln 2}{k}$ hay $k = \frac{-\ln 2}{s}$. Như vậy, nếu biết chu kì bán huỷ của một chất phóng xạ thì ta cũng tính được hệ số suy giảm của chất phóng xạ đó. Chẳng hạn, chu kì bán huỷ của radium là 1550 năm nên hệ số suy giảm của radium là $k = \frac{-\ln 2}{1550} \approx -0{,}000447$.

Câu hỏi và bài tập

47. Khoảng 200 năm trước, hai nhà khoa học Pháp là Clô-zi-ut (R. Clausius) và Cla-pay-rông (E. Clapeyron) đã thấy rằng áp suất p của hơi nước (tính bằng milimét thuỷ ngân, viết tắt là mmHg) gây ra khi nó chiếm khoảng trống phía trên của mặt nước chứa trong một bình kín (h.2.7) được tính theo công thức

$$p = a \cdot 10^{\frac{k}{t+273}},$$



Hình 2.7

trong đó t là nhiệt độ C của nước, a và k là những hằng số. Cho biết $k \approx -2258{,}624$.

a) Tính a biết rằng khi nhiệt độ của nước là $100^{\circ}C$ thì áp suất của hơi nước là 760 mmHg (tính chính xác đến hàng phần chục).

b) Tính áp suất của hơi nước khi nhiệt độ của nước là $40^{\circ}C$ (tính chính xác đến hàng phần chục).

48. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^2 - e^{3x+2}}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{5x}}{x}$.

49. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (x-1)e^{2x}$; b) $y = x^2\sqrt{e^{4x}+1}$;

c) $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$; d) $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

50. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

a) $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$; b) $y = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

51. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; b) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

52. Sử dụng công thức $L(dB) = 10\log\dfrac{I}{I_0}$ (xem bài đọc thêm "Lôgarit trong một số công thức đo lường" tr.99), hãy tính gần đúng, chính xác đến hàng đơn vị, độ lớn (dB) của âm thanh có tỉ số $\dfrac{I}{I_0}$ cho trong bảng sau rồi điền vào cột còn trống :

STT	Loại âm thanh	$\dfrac{I}{I_0}$	Độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	
2	Nhạc êm dịu	4000	
3	Nhạc mạnh phát ra từ loa	$6{,}8.10^8$	
4	Tiếng máy bay phản lực	$2{,}3.10^{12}$	
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	

53. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$;   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.

54. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (3x-2)\ln^2 x$;   b) $y = \sqrt{x^2+1}\,\ln x^2$;

c) $y = x.\ln\dfrac{1}{1+x}$;   d) $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

55. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của nó ?

a) $y = \log_{\frac{2}{e}} x$;   b) $y = \log_a x$ với $a = \dfrac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$.

56. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$;   b) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

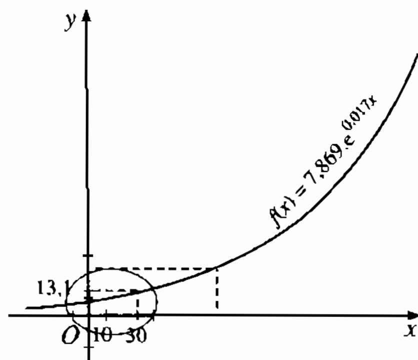


ƯỚC TÍNH DÂN SỐ VIỆT NAM

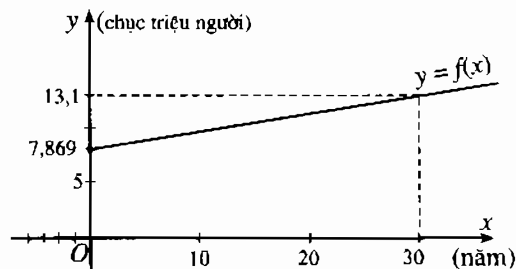
Năm 2001, dân số nước ta khoảng 78 690 000 người. Theo công thức tăng trưởng mũ, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn là 1,7% thì ước tính số dân Việt Nam x năm sau sẽ là $78\,690\,000.e^{0,017x}$ (người) = $7,869.e^{0,017x}$ (chục triệu người). Để phần nào thấy được mức độ tăng nhanh của dân số, ta xét hàm số

$$f(x) = 7,869.e^{0,017x}.$$

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (h.2.8) cho thấy khoảng 30 năm sau (tức là khoảng năm 2031), dân số nước ta sẽ vào khoảng 131 triệu người, tức là tăng gấp rưỡi. Chính vì vậy, để đảm bảo nền kinh tế phát triển bền vững, Đảng và Nhà nước ta luôn quan tâm đến vấn đề dân số và kế hoạch hoá gia đình.



Hình 2.8a
Đồ thị hàm số y = f(x)



Hình 2.8b
Hình ảnh phóng to một phần của h.2.8a

§ 6 HÀM SỐ LUỸ THỪA

Chúng ta đã học các hàm số : $y = x$, $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Đó là những trường hợp riêng của *hàm số luỹ thừa.*

1. Khái niệm hàm số luỹ thừa

Hàm số luỹ thừa là hàm số có dạng $y = x^\alpha$, trong đó α là một hằng số tuỳ ý.

Từ các định nghĩa về luỹ thừa, ta thấy

– Hàm số $y = x^n$, với n nguyên dương, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

– Hàm số $y = x^n$, với n nguyên âm hoặc $n = 0$, xác định với mọi $x \neq 0$.

– Hàm số $y = x^\alpha$, với α không nguyên, có tập xác định là tập các số thực dương.

Người ta chứng minh được rằng hàm số luỹ thừa liên tục trên tập xác định của nó.

CHÚ Ý

Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x > 0$. Do đó, hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Chẳng hạn, hàm số

$y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc ba, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$; còn hàm số luỹ thừa $y = x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định với mọi $x > 0$.

2. Đạo hàm của hàm số luỹ thừa

Với n là số nguyên lớn hơn 1, ta đã có công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tương tự, ta có công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa với số mũ thực sau đây.

ĐỊNH LÍ

a) Hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u^\alpha(x)$ cũng có đạo hàm trên J và

$$\left(u^\alpha(x)\right)' = \alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x).$$

Chứng minh

a) Với mọi $x > 0$, ta có

$$\left(x^\alpha\right)' = \left(e^{\ln x^\alpha}\right)' = e^{\ln x^\alpha}\left(\ln x^\alpha\right)' = x^\alpha(\alpha \ln x)' = \alpha x^\alpha.\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

b) Kết luận này suy ra từ a) và quy tắc đạo hàm của hàm số hợp. □

Ví dụ 1

a) $(x^\pi.\pi^x)' = (x^\pi)'.\pi^x + x^\pi.(\pi^x)'$

$= \pi.x^{\pi-1}.\pi^x + x^\pi.\pi^x.\ln\pi = x^{\pi-1}\pi^x(\pi + x\ln\pi).$

b) $\left[\left(\ln x\right)^{1+\sqrt{2}}\right]' = (1+\sqrt{2})\left(\ln x\right)^{\sqrt{2}}(\ln x)' = (1+\sqrt{2})\left(\ln x\right)^{\sqrt{2}}.\frac{1}{x}.$

H1 *Chứng minh rằng với n nguyên và $n \leq 1$ ta có $(x^n)' = nx^{n-1}$ với mọi $x \neq 0$.*

CHÚ Ý

a) Áp dụng định lí trên, ta dễ dàng chứng minh công thức đạo hàm của hàm số căn bậc n sau đây :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

(với mọi $x > 0$ nếu n chẵn, với mọi $x \neq 0$ nếu n lẻ).

b) Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên J và thoả mãn điều kiện $u(x) > 0$ với mọi $x \in J$ khi n chẵn, $u(x) \neq 0$ với mọi $x \in J$ khi n lẻ thì

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}} \text{ (với mọi } x \in J).$$

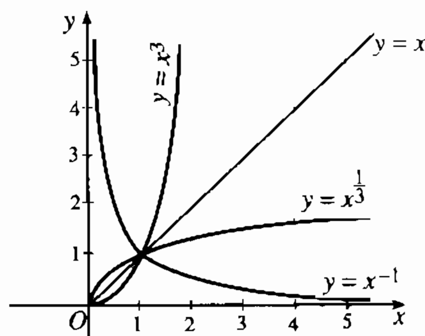
Ví dụ 2. $(\sqrt[3]{\sin 3x})' = \dfrac{(\sin 3x)'}{3\sqrt[3]{(\sin 3x)^2}} = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{\sin^2 3x}}.$

H2 *Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[4]{e^{2x}+1}$.*

3. Vài nét về sự biến thiên và đồ thị của hàm số luỹ thừa

Ở đây, ta chỉ xét các hàm số luỹ thừa dạng $y = x^{\alpha}$ với $\alpha \neq 0$ và với tập xác định là $(0 ; +\infty)$.

Từ công thức $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, ta suy ra hàm số $y = x^{\alpha}$ đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ nếu $\alpha > 0$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ nếu $\alpha < 0$. Hình 2.9 thể hiện đồ thị của một số hàm số luỹ thừa trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

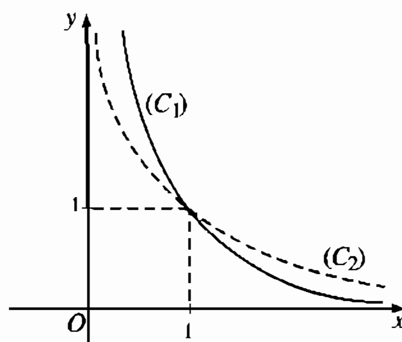


Hình 2.9

Nhận xét. Do $1^{\alpha} = 1$ với mọi α nên đồ thị của mọi hàm số luỹ thừa đều đi qua điểm (1 ; 1).

Câu hỏi và bài tập

57. Trên hình 2.10 cho hai đường cong (C_1) (đường nét liền) và (C_2) (đường nét đứt) được vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ. Biết rằng mỗi đường cong ấy là đồ thị của một trong hai hàm số luỹ thừa $y = x^{-2}$ và $y = x^{-\frac{1}{2}}$ $(x > 0)$. Chỉ dựa vào tính chất của luỹ thừa, có thể nhận biết đường cong nào là đồ thị của hàm số nào được không ? Hãy nêu rõ lập luận.



Hình 2.10

58. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (2x + 1)^{\pi}$;

b) $y = \sqrt[5]{\ln^3 5x}$;

c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}$;

d) $y = \left(\dfrac{x}{b}\right)^a \left(\dfrac{a}{x}\right)^b$ với $a > 0,\ b > 0$.

Luyện tập

59. Tính giá trị gần đúng đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm đã cho (chính xác đến hàng phần trăm) :

a) $y = \log_3(\sin x)$ tại $x = \dfrac{\pi}{4}$;

b) $y = \dfrac{2^x}{x^2}$ tại $x = 1$.

60. a) Chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ và $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ đối xứng với nhau qua trục tung (h.2.2 với a = 2).

b) Chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng với nhau qua trục hoành (h.2.4 với $a = 2$).

61. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{0,5} x$. Dựa vào đồ thị, hãy giải các bất phương trình sau :

a) $\log_{0,5} x > 0$;

b) $-3 \le \log_{0,5} x < -1$.

62. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. Dựa vào đồ thị, hãy giải các bất phương trình sau :

a) $\left(\sqrt{3}\right)^x \le 1$;

b) $\left(\sqrt{3}\right)^x > 3$.

§ 7 PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

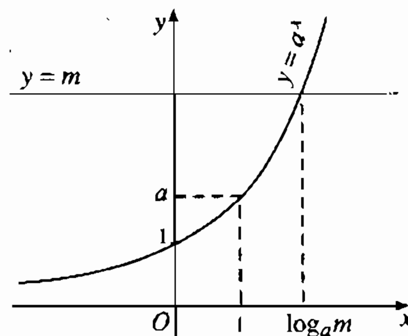
Trên thực tế, nhiều bài toán dẫn đến việc giải phương trình dạng $a^x = m$ hoặc $\log_a x = m$, trong đó m và a là những số cho trước với $0 < a \neq 1$. Đó là những dạng đơn giản của *phương trình mũ* và *phương trình lôgarit*.

Trong bài này, ta vẫn giả thiết a là một số cho trước, dương và khác 1.

1. Phương trình cơ bản

• *Phương trình mũ cơ bản* có dạng $a^x = m$, trong đó m là số đã cho. Phương trình này xác định với mọi x.

Dễ thấy rằng khi $m \le 0$, đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = a^x$; còn khi $m > 0$, đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = a^x$ tại đúng một điểm (h.2.11). Do đó



Hình 2.11

> Nếu $m \leq 0$ thì phương trình $a^x = m$ vô nghiệm ;
>
> Nếu $m > 0$ thì phương trình $a^x = m$ có một nghiệm duy nhất $x = \log_a m$. Nói cách khác,
>
> $$\forall m \in (0 ; +\infty),\ a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m.$$

Ví dụ 1. a) $3^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 2$;

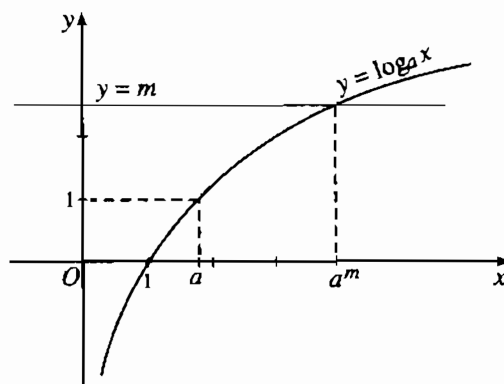
b) $10^x = 1 \Leftrightarrow x = \log 1 \Leftrightarrow x = 0$.

H1 *Giải các phương trình sau :*

a) $2^x = 8$; *b)* $e^x = 5$.

• *Phương trình lôgarit cơ bản* có dạng $\log_a x = m$, trong đó m là số đã cho. Điều kiện xác định của phương trình này là $x > 0$.

Dễ thấy đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \log_a x$ tại đúng một điểm (h.2.12). Do đó



Hình 2.12

> Với mỗi giá trị tuỳ ý của m, phương trình $\log_a x = m$ luôn có một nghiệm duy nhất $x = a^m$. Nói cách khác,
>
> $$\forall m \in (-\infty ; +\infty),\ \log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m.$$

Ví dụ 2. $\log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$;

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$.

H2 *Giải các phương trình sau :*

a) $\log_3 x = \log_3 5$; *b)* $\log x = -4$.

Từ đó hãy cho biết nghiệm của phương trình $\log_a x = \log_a p$, $(p > 0)$.

2. Một số phương pháp giải phương trình mũ và lôgarit

a) Phương pháp đưa về cùng cơ số

Trong bài trước, ta đã biết các tính chất :

(i) $a^{\alpha} = a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta$;

(ii) Nếu $\alpha > 0, \beta > 0$ thì $\log_a\alpha = \log_a\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Các tính chất đó cho phép ta giải một số dạng phương trình mũ (hoặc phương trình lôgarit) bằng cách đưa các luỹ thừa (hoặc các lôgarit) trong phương trình về luỹ thừa (hoặc lôgarit) với cùng một cơ số. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$9^{x+1} = 27^{2x+1}. \quad (1)$$

Giải

Nhận xét rằng ta có thể đưa hai vế của phương trình về luỹ thừa của cùng cơ số 3.

$$9^{x+1} = 3^{2(x+1)} \text{ và } 27^{2x+1} = 3^{3(2x+1)}.$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow 3^{2(x+1)} = 3^{3(2x+1)} \Leftrightarrow 2(x+1) = 3(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow -4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{4}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\log_2\frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 1). \quad (2)$$

Giải

Điều kiện xác định của phương trình (2) là $x > 0$ và $x^2 - x - 1 > 0$.

Với điều kiện đó, do $\log_2\frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}} x$ nên phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 1) \text{ hay } x = x^2 - x - 1.$$

Bởi vậy, ta có thể viết

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \\ x = x^2 - x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = x^2 - x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 1 + \sqrt{2} \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + \sqrt{2}$.

H3 *Một bạn giải phương trình* $\log_4 x^2 = \log_2 5$ *như sau : Vì* $\log_4 x^2 = \log_2 x$ *nên*

$$\log_4 x^2 = \log_2 5 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 5 \Leftrightarrow x = 5.$$

Lời giải đó đúng hay sai ?

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\log_4(x + 12) \,.\, \log_x 2 = 1. \qquad (3)$$

Giải

Để vế trái của (3) có nghĩa, ta phải có $x + 12 > 0$ và $0 < x \neq 1$. Vậy điều kiện xác định của phương trình (3) là $0 < x \neq 1$.

Khi đó, $\log_2 x \neq 0$ và $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$, thành thử với điều kiện $0 < x \neq 1$, ta có

$$(3) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x + 12).\ \frac{1}{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2(x + 12) = \log_2 x^2 \Leftrightarrow x + 12 = x^2.$$

Do đó, ta có thể viết

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 12 = x^2 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ hoặc } x = 4 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = 4$. □

Đưa về cùng cơ số là phương pháp rất hay dùng khi giải các phương trình mũ và phương trình lôgarit. Nó thường được dùng kết hợp với các phương pháp khác mà ta sẽ nêu dưới đây.

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 6. Giải phương trình $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

Giải

Ta có thể viết $3^{2x+5} = 3.\ 3^{2x+4} = 3.\ 3^{2(x+2)} = 3.\left(3^{x+2}\right)^2$.

Vì vậy, nếu đặt $y = 3^{x+2}$ (với $y > 0$) thì phương trình đã cho có dạng $3y^2 = y + 2$, hay $3y^2 - y - 2 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $y = 1$ và $y = -\frac{2}{3}$, nhưng chỉ có $y = 1$ là thích hợp. Do đó

$$3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 1 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -2$.

H4 *Giải phương trình* $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$ *bằng cách đặt ẩn phụ* $y = 2^{x-3}$.

Ví dụ 7. Xét phương trình $\dfrac{6}{\log_2 2x} + \dfrac{4}{\log_2 x^2} = 3.$ (4)

Dễ thấy điều kiện xác định của phương trình là $x > 0,\ x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq 1$. Với điều kiện đó, ta có

$$(4) \Leftrightarrow \frac{6}{1 + \log_2 x} + \frac{4}{2\log_2 x} = 3. \qquad (5)$$

H5 *Giải phương trình (5) bằng cách đặt* $y = \log_2 x$ *rồi kết luận về tập nghiệm của (4).*

c) Phương pháp lôgarit hoá

Tính chất (ii) đã nêu còn cho phép giải phương trình có hai vế luôn dương bằng cách lấy lôgarit hai vế (theo cùng một cơ số thích hợp nào đó). Việc làm đó gọi là *lôgarit hoá* hai vế của phương trình.

Ví dụ 8. Giải phương trình $3^{x-1}.2^{x^2} = 8.4^{x-2}$.

Giải

Dễ thấy hai vế của phương trình xác định với mọi x và luôn nhận giá trị dương. Do đó có thể lôgarit hoá hai vế theo cơ số 2. Ta có

$$3^{x-1}.2^{x^2} = 8.4^{x-2} \Leftrightarrow (x-1)\log_2 3 + x^2 = \log_2 8 + (x-2)\log_2 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2 - \log_2 3)x + 1 - \log_2 3 = 0.$$

Phương trình bậc hai cuối cùng có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 1 - \log_2 3$. Đó cũng là hai nghiệm của phương trình đã cho. □

Lôgarit hoá là phương pháp khá thông dụng trong việc giải phương trình mũ. Khi lôgarit hoá, ta cần khéo chọn cơ số để lời giải được gọn.

H6 *Bằng phương pháp lôgarit hoá, giải phương trình* $2^x.5^x = 0,2.(10^{x-1})^5$.

d) Phương pháp sử dụng tính đồng biến hay nghịch biến của hàm số

Ví dụ 9. Giải phương trình $2^x = 2 - \log_3 x$.

Giải

Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Ta sẽ chứng minh rằng phương trình không còn nghiệm nào khác.

Thật vậy, điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$, tức là $x \in (0 ; +\infty)$. Trên khoảng đó, hàm số $y = 2^x$ đồng biến trong khi hàm số $y = 2 - \log_3 x$ nghịch biến.

Ta xét hai trường hợp :

– Nếu $x > 1$ thì $\log_3 x > 0$ và $2^x > 2$. Do đó $2 - \log_3 x < 2 < 2^x$. Điều đó chứng tỏ trên khoảng $(1 ; +\infty)$, không có giá trị nào của x là nghiệm của phương trình đã cho.

– Nếu $0 < x < 1$ thì $\log_3 x < 0$ và $2^x < 2$. Do đó $2 - \log_3 x > 2 > 2^x$. Điều đó chứng tỏ trên khoảng $(0 ; 1)$, không có giá trị nào của x là nghiệm của phương trình đã cho.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu hỏi và bài tập

63. Giải các phương trình sau :

a) $(2 + \sqrt{3})^{2x} = 2 - \sqrt{3}$;

b) $2^{x^2 - 3x + 2} = 4$;

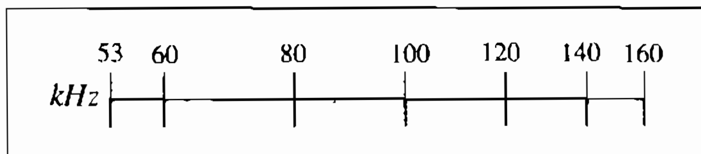
c) $2 . 3^{x+1} - 6 . 3^{x-1} - 3^x = 9$;

d) $\log_3(3^x + 8) = 2 + x$.

64. Giải các phương trình sau :

a) $\log_2[x(x-1)] = 1$;   b) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$.

65. Trên mặt mỗi chiếc rađiô đều có các vạch chia để người sử dụng dễ dàng chọn đúng sóng rađiô cần tìm. Biết rằng vạch chia ở vị trí cách vạch tận cùng bên trái một khoảng d (cm) thì ứng với tần số $F = ka^d$ (kHz), trong đó k và a là hai hằng số được chọn sao cho vạch tận cùng bên trái ứng với tần số 53 kHz, vạch tận cùng bên phải ứng với tần số 160 kHz và hai vạch này cách nhau 12 cm.



a) Hãy tính k và a (tính a chính xác đến hàng phần nghìn).

b) Giả sử đã cho F, hãy giải phương trình $ka^d = F$ với ẩn d.

c) Áp dụng kết quả của b), hãy điền vào ô trống trong bảng sau (kết quả tính chính xác đến hàng phần trăm)

F	53	60	80	100	120	140	160
d							

66. Giải các phương trình sau :

a) $2^{x+1} . 5^x = 200$;   b) $0{,}125 . 4^{2x-3} = (4\sqrt{2})^x$.

67. Giải các phương trình sau :

a) $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$;   b) $\log_{\sqrt{3}} x . \log_3 x . \log_9 x = 8$.

68. Giải các phương trình sau :

a) $3^{x+1} + 18.3^{-x} = 29$;

b) $27^x + 12^x = 2.8^x$. (*Hướng dẫn :* Chia cả hai vế cho 2^{3x} rồi đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$).

69. Giải các phương trình sau :

a) $\log^2 x^3 - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0$;   b) $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$;

c) $\log_{9x}27 - \log_{3x}3 + \log_9 243 = 0$.

70. Giải các phương trình sau :

a) $3^{4^x} = 4^{3^x}$;

b) $3^{2-\log_3 x} = 81x$;

c) $3^x.\,8^{\frac{x}{x+1}} = 36$;

d) $x^6.5^{-\log_x 5} = 5^{-5}$.

71. Giải các phương trình sau :

a) $2^x = 3 - x$;

b) $\log_2 x = 3 - x$.

§ 8 HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Khi giải hệ phương trình mũ và lôgarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ, ...

Trong phần này, ta chỉ xét một vài ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{x+y} + 3^y = 5 \\ 2^{x+y}3^{y-1} = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $u = 2^{x+y}$ và $v = 3^y$ $(u > 0, v > 0)$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6. \end{cases} \quad (2)$$

Dễ thấy hệ (2) có hai nghiệm là $(u ; v) = (2 ; 3)$ và $(u ; v) = (3 ; 2)$. Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện $u > 0$ và $v > 0$. Do đó, ta phải giải hai hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 2 \\ 3^y = 3, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 3 \\ 3^y = 2. \end{cases} \quad (4)$$

Ta có (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

H1 *Tiếp tục giải hệ (4) và kết luận về nghiệm của hệ (1).*

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{2x-y} + 2^x = 2^{1+y} \\ \log_2 x.(\log_4 y - 1) = 4. \end{cases} \qquad (5)$$

Giải

Trước hết, ta xét phương trình thứ nhất trong hệ (5) :

$$2^{2x-y} + 2^x = 2^{1+y}. \qquad (6)$$

Nhân hai vế của phương trình (6) với 2^{-y}, ta được phương trình $2^{2(x-y)} + 2^{x-y} = 2.$

Đặt $2^{x-y} = t$ $(t > 0)$, ta được phương trình $t^2 + t - 2 = 0$; phương trình này có hai nghiệm là $t = 1$ và $t = -2$, trong đó chỉ có nghiệm $t = 1$ là thích hợp. Vậy

$$(6) \Leftrightarrow 2^{x-y} = 1 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Đem kết quả này thế vào phương trình thứ hai của hệ (5), ta được

$$\left(\frac{1}{2}\log_2 x - 1\right)\log_2 x = 4 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{-2} \\ x = 2^4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ x = 16. \end{array}\right.$$

Kết luận : Hệ (5) có hai nghiệm là $(x ; y) = \left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ và $(x ; y) = (16 ; 16)$.

H2 *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} xy = 1 \\ \log^2 x + \log^2 y = 2. \end{cases}$

Câu hỏi và bài tập

Giải các hệ phương trình (bài 72 và bài 73) :

72. a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5. \end{cases}$

73. a) $\begin{cases} 3^{-x}.2^{y} = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x + y) = 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1. \end{cases}$

Luyện tập

Giải các phương trình (từ bài 74 đến bài 78) :

74. a) $\log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$;

b) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log(3-x)}$;

c) $7^{\log x} - 5^{\log x+1} = 3.5^{\log x-1} - 13,7^{\log x-1}$;

d) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.

75. a) $\log_3(3^x - 1).\log_3(3^{x+1} - 3) = 12$;

b) $\log_{x-1} 4 = 1 + \log_2(x - 1)$;

c) $5\sqrt{\log_2(-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}$;

d) $3^{\log_4 x + \frac{1}{2}} + 3^{\log_4 x - \frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

76. a) $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$;

b) $4^{\ln x + 1} - 6^{\ln x} - 2.3^{\ln x^2 + 2} = 0$;

c) $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 1 = 0$;

d) $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8$.

77. a) $2^{\sin^2 x} + 4.2^{\cos^2 x} = 6$;

b) $4^{3+2\cos 2x} - 7.4^{1+\cos 2x} = 4^{\frac{1}{2}}$.

78. a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = x + 4$;

b) $\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^x + \left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^x = 1$.

79. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 3.2^x + 2.3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 7.\log_7 y = 1 + \log_5 2 \\ 3 + \log_2 y = \log_2 5(1 + 3\log_5 x). \end{cases}$

§ 9 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

• Khi giải các bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit, cần nhớ rằng các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Sau đây, ta xét một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau :

a) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$; b) $9^x < 2.\,3^x + 3$.

Giải

a) Ta biến đổi bất phương trình đã cho như sau :

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x+2}(1 - 2 - 2^2) > 5^{x+1}(1 - 5)$$

$$\Leftrightarrow -5.\,2^{x+2} > -4.\,5^{x+1} \Leftrightarrow 2^x < 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x < 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ (do tính nghịch biến của hàm số } y = \left(\frac{2}{5}\right)^x \text{).}$$

Kết luận : Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0 ; +\infty)$.

b) Do $9^x = (3^x)^2$ nên khi đặt $t = 3^x$, ta được bất phương trình $t^2 - 2t - 3 < 0$. Bất phương trình này có nghiệm là $-1 < t < 3$ nên

$$9^x < 2.\,3^x + 3 \Leftrightarrow -1 < 3^x < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > -1 \\ 3^x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1$$

(do $3^x > 0 > -1$ với mọi x và tính đồng biến của hàm số $y = 3^x$).

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $(-\infty ; 1)$.

H1 *Giải bất phương trình* $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

• Đối với các bất phương trình lôgarit, ta phải đặc biệt chú ý đến điều kiện xác định của bất phương trình.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\log_{0,5}(4x + 11) < \log_{0,5}(x^2 + 6x + 8). \quad (1)$$

Giải

Điều kiện xác định của bất phương trình (1) là $4x + 11 > 0$ và $x^2 + 6x + 8 > 0$. Với điều kiện đó, do tính nghịch biến của hàm số lôgarit cơ số 0,5, bất phương trình (1) tương đương với $4x + 11 > x^2 + 6x + 8$. Bởi vậy, ta có thể viết

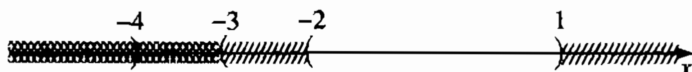
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 11 > 0 \\ x^2 + 6x + 8 > 0 \\ 4x + 11 > x^2 + 6x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 8 > 0 \\ 4x + 11 > x^2 + 6x + 8. \end{cases}$$

Giải từng bất phương trình :

$x^2 + 6x + 8 > 0 \Leftrightarrow x < -4$ hoặc $x > -2$;

$4x + 11 > x^2 + 6x + 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1.$

Các giá trị của x thoả mãn đồng thời cả hai bất phương trình trên là $x \in (-2 ; 1)$.



Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = (-2 ; 1)$.

H2 *Giải bất phương trình* $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) > \log_3(2 - x)$.

Câu hỏi và bài tập

Giải các bất phương trình sau :

80. a) $2^{3 - 6x} > 1$; b) $16^x > 0,125$.

81. a) $\log_5(3x - 1) < 1$; b) $\log_{\frac{1}{3}}(5x - 1) > 0$;

c) $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) \geq -1$; d) $\log_3 \dfrac{1 - 2x}{x} \leq 0$.

82. a) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \le 0$; b) $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0.$

83. a) $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$;

b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + 2\log_3(2 - x) \ge 0.$

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương II

84. So sánh p và q, biết :

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^p > \left(\frac{3}{2}\right)^{-q}$; b) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-p} < \left(\frac{3}{8}\right)^q$;

c) $0{,}25^p < \left(\frac{1}{2}\right)^{2q}$; d) $\left(\frac{7}{2}\right)^p < \left(\frac{2}{7}\right)^{p-2q}$.

85. Cho $x < 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(2^x - 2^{-x}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(2^x - 2^{-x}\right)^2}}} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x}.$$

86. Tính

a) $A = 9^{2\log_3 4 + 4\log_{81} 2}$; b) $B = \log_a\left(\frac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right)$;

c) $C = \log_5 \log_5 \underbrace{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}}}}_{n \text{ dấu căn}}$.

87. Chứng minh rằng $\log_2 3 > \log_3 4$.

88. Gọi c là cạnh huyền, a và b là hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Chứng minh rằng

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a.$$

89. Chứng minh rằng hàm số $y = \ln\frac{1}{1+x}$ thoả mãn hệ thức $xy' + 1 = e^y$.

90. Giả sử đồ thị (G) của hàm số $y = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^x}{\ln 2}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính giá trị gần đúng của diện tích của tam giác OAB (chính xác đến hàng phần nghìn).

91. Kí hiệu M là một điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = \log_a x$. Trong hai khẳng định $a > 1$ và $0 < a < 1$, khẳng định nào đúng trong mỗi trường hợp sau ? Vì sao ?

a) M có toạ độ $(0,5 ; -7)$;　　b) M có toạ độ $(0,5 ; 7)$;

c) M có toạ độ$(3 ; 5,2)$;　　d) M có toạ độ $(3 ; -5,2)$.

92. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của một cái cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân huỷ một cách chậm chạp, chuyển hoá thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cái cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức

$$P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}\ (\%).$$

Phân tích một mẩu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẩu gỗ đó là 65%. Hãy xác định niên đại của công trình kiến trúc đó.

93. Giải các phương trình :

a) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25.128^{\frac{x+17}{x-3}}$;　　b) $5^{x-1} = 10^x.2^{-x}.5^{x+1}$;

c) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;　　d) $3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 28 = 2\log_2\sqrt{2}$.

94. Giải các phương trình :

a) $\log_3\left(\log_{0,5}^2 x - 3\log_{0,5} x + 5\right) = 2$;　　b) $\log_2(4.3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$;

c) $1-\frac{1}{2}\log(2x-1)=\frac{1}{2}\log(x-9)$; d) $\frac{1}{6}\log_2(x-2)-\frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}$.

95. Giải phương trình

$$4^x-3^x=1.$$

96. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases}\log_2(x-y)=5-\log_2(x+y)\\ \dfrac{\log x-\log 4}{\log y-\log 3}=-1\end{cases}$; b) $\begin{cases}2\log_2 x-3^y=15\\ 3^y.\log_2 x=2\log_2 x+3^{y+1}.\end{cases}$

97. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\dfrac{1}{2}$; b) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1}-36^x\right)\ge-2$;

c) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+18)+2\log_5(x-4)<0$.

Bài tập trắc nghiệm khách quan

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

98. Giá trị biểu thức $\log_2 36-\log_2 144$ bằng

(A) -4 ; (B) 4 ; (C) -2 ; (D) 2.

99. Biết $\log_6\sqrt{a}=2$ thì $\log_6 a$ bằng

(A) 36 ; (B) 108 ; (C) 6 ; (D) 4.

100. Tập các số x thoả mãn $\log_{0,4}(x-4)+1\ge0$ là

(A) $(4;+\infty)$; (B) $(4;6,5]$; (C) $(-\infty;6,5)$; (D) $[6,5;+\infty)$.

101. Tập các số x thoả mãn $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x}\le\left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

(A) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$; (B) $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$; (C) $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$; (D) $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$.

102. Giá trị biểu thức $3\log_{0,1} 10^{2,4}$ bằng

(A) 0,8 ; (B) 7,2 ; (C) −7,2 ; (D) 72.

103. Giá trị biểu thức $(0,5)\log_2 25 + \log_2(1,6)$ bằng

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 5.

104. Giá trị biểu thức $\dfrac{\log_2 240}{\log_{3,75} 2} - \dfrac{\log_2 15}{\log_{60} 2} + \log_2 1$ bằng

(A) 4 ; (B) 3 ; (C) 1 ; (D) − 8.

105. Tập các số x thoả mãn $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x-1} \le \left(\dfrac{3}{5}\right)^{2-x}$ là

(A) $[3 ; +\infty)$; (B) $(-\infty ; 1]$; (C) $[1 ; +\infty)$; (D) $(+\infty ; -\infty)$.

106. Đối với hàm số $f(x) = e^{\cos 2x}$, ta có

(A) $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$; (B) $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$;

(C) $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3e}$; (D) $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3e}$.

107. Đối với hàm số $y = \ln\dfrac{1}{x+1}$, ta có

(A) $xy' + 1 = e^y$; (B) $xy' + 1 = -e^y$;

(C) $xy' - 1 = e^y$; (D) $xy' - 1 = -e^y$.

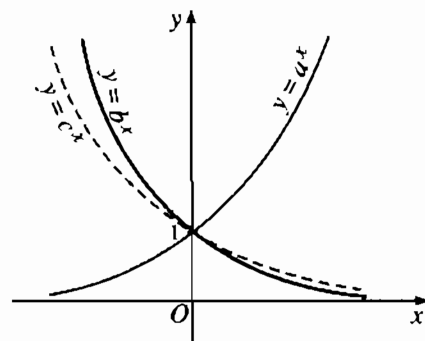
108. Trên hình 2.13, đồ thị của ba hàm số

$$y = a^x \text{ , } y = b^x \text{ và } y = c^x$$

(a, b và c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng toạ độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của luỹ thừa, hãy so sánh ba số a, b và c.

(A) $a > b > c$; (B) $a > c > b$;

(C) $c > b > a$; (D) $b > c > a$.



Hình 2.13

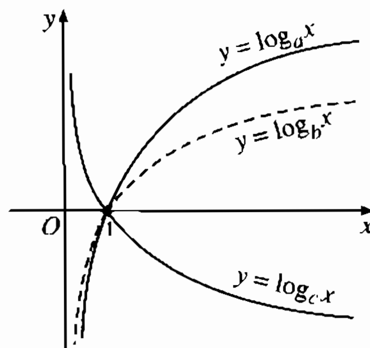
109. Trên hình 2.14, đồ thị của ba hàm số

$$y = \log_a x \text{ , } y = \log_b x \text{ và } y = \log_c x$$

(a, b và c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng toạ độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lôgarit, hãy so sánh ba số a, b và c.

(A) $a > b > c$; (B) $c > a > b$;

(C) $b > a > c$; (D) $c > b > a$.



Hình 2.14

110. Phương trình $\log_2 4x - \log_{\frac{x}{2}} 2 = 3$

có bao nhiêu nghiệm ?

(A) 1 nghiệm ; (B) 2 nghiệm ;

(C) 3 nghiệm ; (D) Vô nghiệm.

Chương III

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG



Trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với khái niệm **nguyên hàm** và **tích phân**. Đây là hai khái niệm cơ bản, rất quan trọng của giải tích, có liên hệ mật thiết với khái niệm đạo hàm. Phép tính tích phân cho chúng ta một phương pháp tổng quát để tính diện tích của những hình phẳng và thể tích của những vật thể có hình dạng phức tạp. Phép tính tích phân được xem là một trong những thành tựu quan trọng nhất của toán học.

Học sinh cần rèn luyện kĩ năng tìm nguyên hàm, tính tích phân và biết áp dụng tích phân để tính diện tích một số hình phẳng và thể tích một số vật thể.

§ 1 NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

Bài toán mở đầu. Vận tốc của một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng tại thời điểm t là $v(t) = 160 - 9{,}8t$ (m/s) (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tính quãng đường đi được của viên đạn kể từ khi bắn lên cho đến thời điểm t.

Gọi $s(t)$ là quãng đường đi được của viên đạn sau khi bắn được t giây.

Ta đã biết $v(t) = s'(t)$. Do đó ta phải tìm hàm số $s = s(t)$ thoả mãn điều kiện :

$$s'(t) = 160 - 9{,}8t.$$

Nhiều vấn đề của khoa học và kĩ thuật đã dẫn tới bài toán sau đây :

Cho hàm số f xác định trên K, ở đó K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng nào đó. Hãy tìm hàm số F sao cho $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f xác định trên K. Hàm số F được gọi là **nguyên hàm** của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

CHÚ Ý

1) Trong trường hợp $K = [a; b]$, các đẳng thức $F'(a) = f(a)$, $F'(b) = f(b)$ được hiểu là

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

2) Cho hai hàm số f và F liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu F là nguyên hàm của f trên khoảng $(a; b)$ thì có thể chứng minh được rằng $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$, do đó F cũng là nguyên hàm của f trên đoạn $[a; b]$.

Ví dụ 1

a) Hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$ vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $F(x) = \tan x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ vì $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Hàm số $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$ vì $F'(x) = \sqrt{x}$ với mọi $x \in (0;+\infty)$ và cả hai hàm số f và F đều liên tục trên $[0;+\infty)$.

H1 *Các hàm số $F_1(x) = -2\cos 2x$ và $F_2(x) = -2\cos 2x + 2$ là những nguyên hàm của hàm số nào ?*

ĐỊNH LÍ 1

> Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K. Khi đó
>
> a) Với mỗi hằng số C, hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K.
>
> b) Ngược lại, với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K.

Chứng minh

a) Giả sử $G(x) = F(x) + C$. Khi đó $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

b) Đặt $H(x) = G(x) - F(x)$, ta có $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ với mọi $x \in K$. Vậy H là hàm số không đổi trên K, tức là $H(x) = C$ với C là một hằng số. Suy ra $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$. □

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm F của hàm số $f(x) = 3x^2$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $F(1) = -1$.

Giải. Dễ thấy $y = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ nên nguyên hàm F cần tìm có dạng $F(x) = x^3 + C$.

Vì $F(1) = -1$ nên $1^3 + C = -1$, suy ra $C = -2$. Vậy $F(x) = x^3 - 2$.

• Từ định lí 1 ta thấy nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì mọi nguyên hàm của f trên K đều có dạng $F(x) + C$ với $C \in \mathbb{R}$. Vậy $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của f trên K.

Họ tất cả các nguyên hàm của f trên K được kí hiệu là $\int f(x)\mathrm{d}x$. Vậy

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Người ta cũng dùng kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ để chỉ một nguyên hàm bất kì của f.

Vậy

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x).$$

(Về kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ xem bài Em có biết : "Nguồn gốc của kí hiệu nguyên hàm và tích phân" tr. 157).

• Người ta đã chứng minh được rằng : *Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.*

• Từ đây, trong các bài toán về nguyên hàm của một hàm số, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả thiết rằng hàm số đó là liên tục và nguyên hàm của nó được xét trên mỗi khoảng (nửa khoảng, đoạn) xác định của hàm số đó.

2. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Bài toán tìm nguyên hàm là bài toán ngược với bài toán tìm đạo hàm. Việc tìm nguyên hàm của một hàm số thường được đưa về tìm nguyên hàm của các hàm số đơn giản hơn. Sau đây là nguyên hàm của một số hàm số đơn giản thường gặp.

1) $\int 0\mathrm{d}x = C$, $\int \mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x = x + C$;

2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;

4) Với k là hằng số khác 0

a) $\int \sin kx\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$;

b) $\int \cos kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin kx}{k} + C$;

c) $\int \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{k} + C$;

d) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$;

5) a) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$;

b) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$

Ta dễ dàng chứng minh các công thức trên bằng cách tính đạo hàm vế phải. Chẳng hạn, vì $\left(\dfrac{\sin kx}{k}\right)' = \cos kx$ nên ta có công thức 4) b).

Ví dụ 3

a) $\int 4x^4\mathrm{d}x = \dfrac{4}{5}x^5 + C.$

b) $\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

c) $\int \cos\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sin\dfrac{x}{2} + C.$

H2 *Tìm* *a)* $\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$; *b)* $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

3. Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

ĐỊNH LÍ 2

> Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì
>
> a) $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$;
>
> b) Với mọi số thực $k \neq 0$ ta có
>
> $$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Chứng minh. a) Ta cần chứng tỏ rằng vế phải là một nguyên hàm của $f+g$. Thật vậy ta có

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x\right)' = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' + \left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)+g(x).$$

b) Chứng minh tương tự. □

Dựa vào nguyên hàm của các hàm số thường gặp và vận dụng hai định lí trên ta có thể tính được nguyên hàm của nhiều hàm số khác.

Ví dụ 4. Tìm

a) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

b) $\int (x-1)(x^4+3x)\mathrm{d}x$;

c) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x}}{2}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + 2\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + C.$$

b) $\int (x-1)(x^4+3x)\mathrm{d}x = \int (x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x)\mathrm{d}x$

$= \int x^5\,\mathrm{d}x - \int x^4\,\mathrm{d}x + \int 3x^2\,\mathrm{d}x - \int 3x\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{x^5}{5} + x^3 - \dfrac{3x^2}{2} + C.$

c) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C.$

H3 *Tìm*

a) $\int (x^3 + 2x^2 - 4)\mathrm{d}x$; b) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$

Câu hỏi và bài tập

1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = 3x^2 + \dfrac{x}{2}$; b) $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - x^2 - \dfrac{1}{3}$; d) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$; e) $f(x) = 10^{2x}$.

2. Tìm

a) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; b) $\int \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2}\mathrm{d}x$;

c) $\int 4\sin^2 x\,\mathrm{d}x$; d) $\int \dfrac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x.$

3. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :

Nguyên hàm của hàm số $y = x\sin x$ là

(A) $x^2 \sin\dfrac{x}{2} + C$; (B) $-x\cos x + C$; (C) $-x\cos x + \sin x + C.$

4. Khẳng định sau đúng hay sai ?

Nếu $f(x) = (1 - \sqrt{x})'$ thì $\int f(x)\mathrm{d}x = -\sqrt{x} + C.$

§ 2 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

> Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K. Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f, tức là $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$ thì
>
> $$\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x = F[u(x)] + C. \qquad (1)$$

Chứng minh

Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp, ta có

$$(F[u(x)] + C)' = F'[u(x)]u'(x) = f[u(x)]u'(x).$$

Vậy ta có (1). □

CHÚ Ý

Trong thực hành, ta thường viết tắt $F[u(x)]$ là $F(u)$, $f[u(x)]$ là $f(u)$ và coi du là vi phân của hàm số $u = u(x)$ (nghĩa là $\mathrm{d}u = \mathrm{d}u(x) = u'(x)\mathrm{d}x$).

Khi đó, công thức (1) được viết như sau :

$$\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x = \int f[u(x)]\mathrm{d}u(x) = \int f(u)\mathrm{d}u$$

$$= F(u) + C = F[u(x)] + C. \qquad (2)$$

Ta nói đã thực hiện phép đổi biến $u = u(x)$.

Ví dụ 1. Tìm $\int (2x + 1)^4 \mathrm{d}x$.

Giải. Ta có $(2x+1)^4\,dx = \frac{1}{2}(2x+1)^4(2x+1)'dx = \frac{1}{2}(2x+1)^4\,d(2x+1)$.

Đặt $u = u(x) = 2x+1$. Áp dụng công thức (2), ta có

$$\int(2x+1)^4\,dx = \int\frac{1}{2}(2x+1)^4\,d(2x+1) = \int\frac{1}{2}u^4\,du = \frac{1}{2}\int u^4\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + C.$$

H1 *Tìm* $\int 2x(x^2+1)^3\,dx$.

Ví dụ 2. Tìm $\int\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx$.

Giải. Ta có

$$\frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+4}} = \frac{(x^2+4)'}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx = (x^2+4)^{-\frac{1}{3}}\,d(x^2+4).$$

Đặt $u = x^2+4$. Áp dụng công thức (2), ta có

$$\int\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx = \int(x^2+4)^{-\frac{1}{3}}\,d(x^2+4) = \int u^{-\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}(x^2+4)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Ví dụ 3. Tìm $\int\cos(7x+5)\,dx$.

Giải. Ta có

$$\cos(7x+5)\,dx = \frac{1}{7}\cos(7x+5)(7x+5)'\,dx = \frac{1}{7}\cos(7x+5)\,d(7x+5).$$

Đặt $u = 7x+5$. Công thức (2) cho ta

$$\int\cos(7x+5)\,dx = \int\frac{1}{7}\cos(7x+5)\,d(7x+5) = \int\frac{1}{7}\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{7}\sin u + C = \frac{1}{7}\sin(7x+5) + C.$$

Ví dụ 4. Tìm $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

Giải. Ta có

$$e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x}\,d(\sin x).$$

Đặt $u = \sin x$. Công thức (2) cho ta

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx = \int e^{\sin x}\,d(\sin x) = \int e^{u}\,du = e^{u} + C = e^{\sin x} + C.$$

H2 *Tìm* $\int x e^{1+x^2}\,dx$.

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Cơ sở của phương pháp lấy nguyên hàm từng phần là định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

> Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì
> $$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Công thức trên gọi là *công thức lấy nguyên hàm từng phần* (gọi tắt là *công thức nguyên hàm từng phần*) và được viết gọn dưới dạng

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Chứng minh

Ta cần chứng tỏ vế phải là một nguyên hàm của uv'. Thật vậy

$$\left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\right)' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) - \left(\int v(x)u'(x)dx\right)'$$

$$= u(x)v'(x) + v(x)u'(x) - v(x)u'(x) = u(x)v'(x).$$ □

Ví dụ 5. Tìm $\int x\cos x\,dx$.

Giải

Đặt $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$. Khi đó $u'(x) = 1$, $v(x) = \sin x$ (chỉ cần lấy một nguyên hàm của v'). Theo công thức nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Ví dụ 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \ln x$.

Giải

Đặt $u = u(x) = \ln x$, $dv = dx$. Khi đó $du = \frac{1}{x}dx$, $v = v(x) = x$. Theo công thức nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

H3 *Tìm nguyên hàm của hàm số* $f(x) = \frac{x}{3}e^{2x}$.

(Hướng dẫn. Đặt $u(x) = \frac{x}{3}$, $v'(x) = e^{2x}$).

Câu hỏi và bài tập

5. Dùng phương pháp đổi biến số, tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = \dfrac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}}$ (*Hướng dẫn.* Đặt $u = 1 - x^3$) ;

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x+4}}$ (*Hướng dẫn.* Đặt $u = 5x + 4$) ;

c) $f(x) = x\sqrt[4]{1-x^2}$ (*Hướng dẫn.* Đặt $u = 1 - x^2$) ;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ (*Hướng dẫn.* Đặt $u = 1 + \sqrt{x}$).

6. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = x\sin\dfrac{x}{2}$;

b) $f(x) = x^2\cos x$;

c) $f(x) = xe^x$;

d) $f(x) = x^3\ln(2x)$.

Luyện tập

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

7. a) $f(x) = 3x\sqrt{7-3x^2}$;

b) $f(x) = \cos(3x+4)$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(3x+2)}$;

d) $f(x) = \sin^5\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$.

8. a) $f(x) = x^2\left(\dfrac{x^3}{18}-1\right)^5$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$;

c) $f(x) = x^3e^x$;

d) $f(x) = e^{\sqrt{3x-9}}$.

9. a) $f(x) = x^2 \cos 2x$; b) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$;

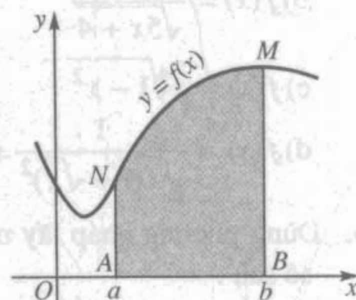
c) $f(x) = \sin^4 x \cos x$; d) $f(x) = x\cos(x^2)$.

§ 3 TÍCH PHÂN

1. Hai bài toán dẫn đến khái niệm tích phân

a) Diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và lấy giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là *hình thang cong* (phần tô đậm trong hình 3.1).



Hình 3.1

Bài toán đặt ra là tìm công thức tính diện tích của hình thang cong.

Bài toán 1

Cho hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Giả sử f là hàm số liên tục, đồng biến và nhận giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Chứng minh rằng diện tích S của hình thang cong đó là

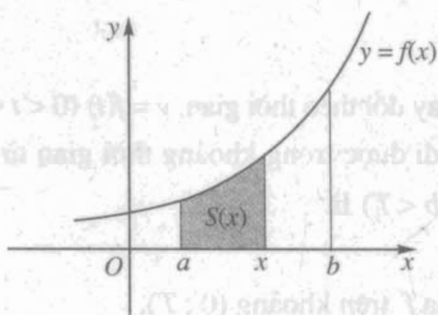
$$S = F(b) - F(a)$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên đoạn $[a ; b]$.

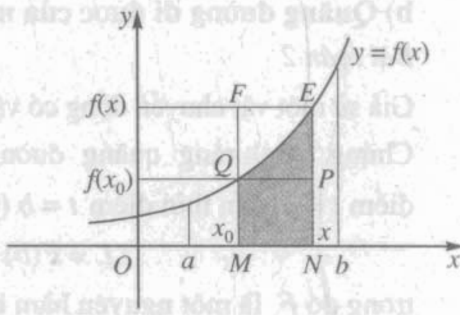
Chứng minh

Kí hiệu $S(x)$ $(a \le x \le b)$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a$ và đường thẳng đi qua điểm x trên trục hoành và vuông góc với trục hoành (h.3.2). Như vậy, ta có một hàm số $y = S(x)$ xác định trên đoạn $[a ; b]$.

Trước hết, ta chứng minh $y = S(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$. Thật vậy, giả sử x_0 là một điểm tuỳ ý cố định thuộc khoảng $(a ; b)$. Xét điểm $x \in (x_0 ; b]$. Khi đó $S(x) - S(x_0)$ là diện tích hình thang cong $MNEQ$ (h.3.3).



Hình 3.2



Hình 3.3

Do f là hàm đồng biến nên hình thang cong $MNEQ$ nằm trong hình chữ nhật $MNEF$ và chứa hình chữ nhật $MNPQ$. Vậy

$$S_{MNPQ} < S_{MNEQ} < S_{MNEF}$$

tức là $\quad f(x_0)(x - x_0) < S(x) - S(x_0) < f(x)(x - x_0),$

suy ra $\quad f(x_0) < \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} < f(x). \qquad (1)$

Vì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ nên từ (1) người ta chứng minh được

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Tương tự với $x \in [a ; x_0)$, ta cũng có $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ hay $S'(x_0) = f(x_0)$.

Vì x_0 là tuỳ ý thuộc $(a ; b)$, nên suy ra $S'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a ; b)$. Tương tự, ta có : $S'(a) = f(a), S'(b) = f(b)$. Vậy hàm số $y = S(x)$ là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a ; b]$. Thành thử tồn tại hằng số C sao cho $S(x) = F(x) + C$.

Dễ thấy $S = S(b) - S(a)$.

Do đó $S = S(b) - S(a) = \left(F(b) + C\right) - \left(F(a) + C\right) = F(b) - F(a)$. □

H1 *Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$.*

b) Quãng đường đi được của một vật

Bài toán 2

Giả sử một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian, $v = f(t)$ $(0 < t < T)$. Chứng minh rằng quãng đường L vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ $(0 < a < b < T)$ là

$$L = F(b) - F(a),$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên khoảng $(0 ; T)$.

Chứng minh

Gọi $s = s(t)$ là quãng đường đi được của vật cho đến thời điểm t. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ là $L = s(b) - s(a)$. Mặt khác, ta đã biết $s'(t) = f(t)$, do đó $s = s(t)$ là một nguyên hàm của f. Thành thử, tồn tại hằng số C sao cho $s(t) = F(t) + C$. Vậy

$$L = s(b) - s(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$ □

2. Khái niệm tích phân

Trong khoa học và kĩ thuật, có nhiều đại lượng quan trọng được biểu thị bằng hiệu $F(b) - F(a)$ trong đó F là một nguyên hàm của hàm số f nào đó.

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số

$$F(b) - F(a)$$

được gọi là **tích phân của f từ a đến b** và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Trong trường hợp $a < b$, ta gọi $\int_a^b f(x)\,dx$ là *tích phân của f trên đoạn* $[a\,;\,b]$.

H2 *Chứng minh rằng $\int_a^b f(x)dx$ là một số không phụ thuộc vào việc chọn nguyên hàm F nào trong họ các nguyên hàm của f.*

Người ta còn dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Như vậy nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Vì $\int f(x)dx$ là một nguyên hàm bất kì của f nên ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)\Bigg|_a^b.$$

Người ta gọi hai số a, b là hai *cận tích phân*, số a là *cận dưới*, số b là *cận trên*, f là *hàm số dưới dấu tích phân*, $f(x)dx$ là *biểu thức dưới dấu tích phân* và x là *biến số lấy tích phân.*

CHÚ Ý

Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x. Chẳng hạn, nếu sử dụng chữ t, chữ u,... làm biến số lấy tích phân thì

$\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(u)\,du$, ... đều là một số và số đó bằng $F(b) - F(a)$.

Ví dụ 1. $\int_3^5 \frac{1}{x}dx = \left(\ln|x|\right)\Big|_3^5 = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$;

$$\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right)\Bigg|_2^4 = 6 + \ln 2.$$ □

Với định nghĩa tích phân, bài toán 1 có thể phát biểu lại như sau :

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đồng biến và nhận giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Tổng quát, người ta chứng minh được

ĐỊNH LÍ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a ; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

H3 *Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian $v = f(t)$. Chứng minh rằng quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm a đến thời điểm b là $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Ví dụ 2. Một ôtô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh (còn nói là "thắng"). Sau khi đạp phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

Giải. Lấy mốc thời gian là lúc ôtô bắt đầu được phanh. Gọi T là thời điểm ôtô dừng. Ta có $v(T) = 0$ suy ra $20 = 40T$ hay $T = 0,5$. Như vậy, khoảng thời gian từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn của ôtô là 0,5 giây. Trong khoảng thời gian 0,5 giây đó, ôtô di chuyển được quãng đường là

$$L = \int_0^{0,5} (20 - 40t)\,\mathrm{d}t = (20t - 20t^2)\Big|_0^{0,5} = 5 \text{ (m)}.$$

3. Tính chất của tích phân

Các tính chất cơ bản của tích phân được phát biểu trong định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K. Khi đó ta có

1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$;

2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$;

3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$;

4) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

5) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Ta chứng minh các tính chất 3) và 4).

Giả sử F là một nguyên hàm của f.

3) Ta có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b)$$

$$= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.$$

4) Áp dụng định lí 2 của §1 ta có

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \left(\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b + \left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$ □

H4 *Hãy chứng minh các tính chất 1), 2) và 5).*

Ví dụ 3. Cho $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = -2$ và $\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x = 3.$

Hãy tính

$$\int_1^3 [3f(x) - g(x)]\mathrm{d}x \quad \text{và} \quad \int_1^3 [5 - 4f(x)]\mathrm{d}x.$$

Giải

$$\int_1^3 [3f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = 3\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x = 3.(-2) - 3 = -9.$$

$$\int_1^3 [5 - 4f(x)]\mathrm{d}x = 5\int_1^3 \mathrm{d}x - 4\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 5.2 - 4.(-2) = 18.$$ □

H5 *Tìm b nếu biết rằng*

$$\int_0^b (2x - 4)\mathrm{d}x = 0.$$

Câu hỏi và bài tập

10. Không tìm nguyên hàm, hãy tính các tích phân sau :

a) $\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 3\right)\mathrm{d}x$;   b) $\int_{-1}^{2} |x|\mathrm{d}x$;   c) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x.$

Hướng dẫn. Áp dụng định lí 1.

11. Cho biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -4$, $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 6$, $\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x = 8$. Hãy tính

a) $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$;   b) $\int_1^2 3f(x)\mathrm{d}x$;

c) $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$; d) $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

12. Cho biết $\int_0^3 f(z)\mathrm{d}z = 3$, $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 7$. Hãy tính $\int_3^4 f(t)\mathrm{d}t$.

13. a) Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a ; b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

b) Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a ; b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

14. a) Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t$ (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$(s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s).

b) Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

15. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s^2). Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

16. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu 25m/s. Gia tốc trọng trường là 9,8m/s^2.

a) Sau bao lâu viên đạn đạt tới độ cao lớn nhất ?

b) Tính quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Bài đọc thêm

TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN VÀ KHÁI NIỆM TỔNG TÍCH PHÂN

1. Tính gần đúng tích phân

Từ định nghĩa tích phân ta thấy muốn tính tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ thì phải tìm được một nguyên hàm F của f. Mặc dù nguyên hàm này chắc chắn tồn tại nhưng trong nhiều trường hợp ta không thể tìm được biểu thức tường minh của $F(x)$ qua các hàm sơ cấp đã biết. (Chẳng hạn, người ta đã chứng minh rằng nguyên hàm của các hàm số $y = e^{-x^2}$, $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y = \sqrt{1 + x^4}$, ... không thể biểu diễn qua các hàm sơ cấp đã biết.). Trong những trường hợp như vậy, việc *tính đúng* tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là không thể thực hiện được. Vậy có thể tính gần đúng tích phân đó được không ?

a) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và lấy giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Xét hình thang cong H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (trên hình 3.4, hàm số $f(x) = 5 - x^2$, $a = -1$, $b = 2$). Gọi S là diện tích của H.

Theo định lí 1 ta có $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

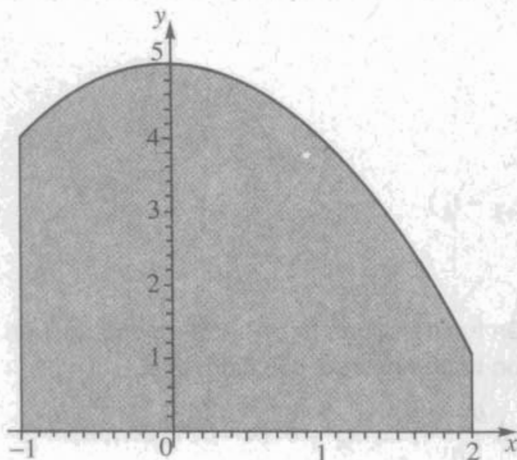
Với mỗi số nguyên dương n, ta chia đoạn $[a; b]$ làm n đoạn con bằng nhau bởi các điểm $x_0 = a$, $x_1 = a + \dfrac{b-a}{n}, \ldots, x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Dựng các hình chữ nhật B_k với đáy là đoạn thẳng $[x_k ; x_{k+1}]$, chiều cao là $f(x_k)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Diện tích của hình chữ nhật B_k là $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$. Gọi A_n là hợp của n hình chữ nhật $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ (xem hình 3.4b với $n = 10$) và $S(A_n)$ là diện tích của hình A_n. Ta có $S(A_n)$ là tổng diện tích của n hình chữ nhật $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$.

Vậy $S(A_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$.

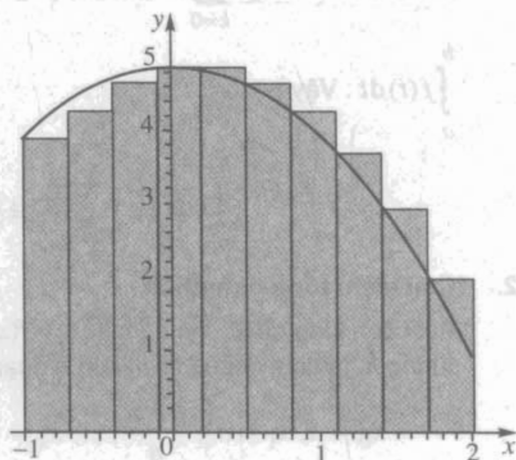
Khi số điểm chia n càng lớn, số hình chữ nhật $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ càng nhiều thì diện tích $S(A_n)$ của hình A_n càng gần với diện tích S của H (xem hình 3.4c với $n = 20$, hình 3.4d với $n = 30$). Vậy $S \approx S(A_n)$ nghĩa là

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$



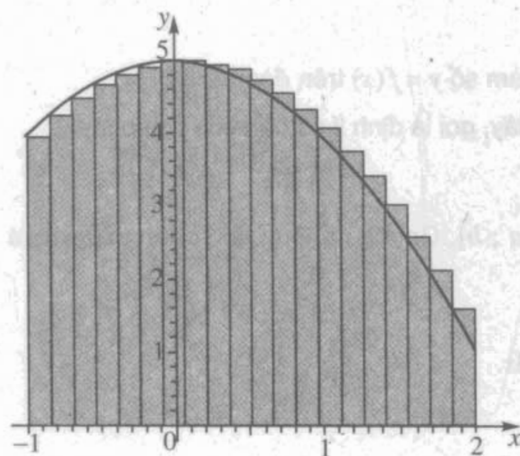
Hình H

a)



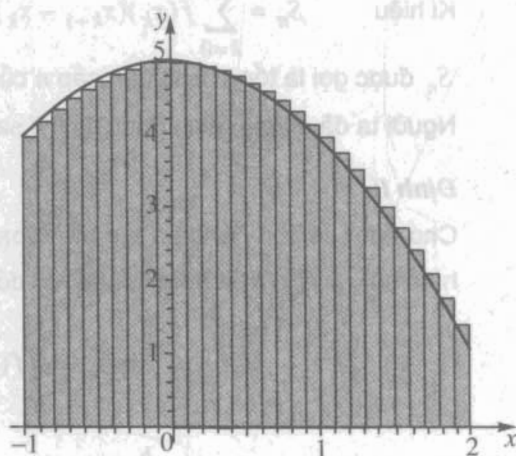
Hình A_{10}

b)



Hình A_{20}

c)



Hình A_{30}

d)

Hình 3.4

b) Có thể nhận được công thức gần đúng trên với lập luận như sau : Giả sử một vật chuyển động với vận tốc $v = f(t)$. Ta chia khoảng thời gian [a; b] thành n khoảng thời gian bằng nhau $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Với n khá lớn thì khoảng thời gian $(t_k ; t_{k+1})$ khá bé nên có thể coi rằng trong khoảng thời gian đó vật chuyển động với vận tốc không đổi. Khi đó, quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $(t_k ; t_{k+1})$ xấp xỉ

bằng $f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$. Thành thử quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $[a ; b]$ xấp xỉ bằng $\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$. Mặt khác, ta đã biết quãng đường đi được là $\int_a^b f(t)\,dt$. Vậy ta có

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k).$$

2. Khái niệm tổng tích phân

Một cách tổng quát, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Với mỗi số nguyên dương n, ta chia đoạn $[a ; b]$ làm n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ ...,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ ...,\ x_n = b\ \ (k = 0, 1, 2..., n).$$

Mỗi đoạn con đều có độ dài bằng $\frac{b-a}{n}$.

Kí hiệu $\qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$

S_n được gọi là tổng tích phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$.

Người ta đã chứng minh được định lí sau đây, gọi là định lí cơ bản của tích phân

Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Gọi S_n là tổng tích phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$. Khi đó

$$\lim S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Thành thử khi n lớn ta có $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$.

Như vậy tổng tích phân S_n dùng để tính xấp xỉ tích phân. Khi cấp n càng lớn thì tổng tích phân S_n càng gần với tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$ và sự xấp xỉ càng tốt, độ chính xác càng cao.

Chú ý. Về mặt lịch sử, khái niệm tích phân được hình thành độc lập với khái niệm nguyên hàm. Tích phân của hàm số f trên đoạn $[a ; b]$ được định nghĩa là giới hạn

của tổng tích phân cấp n của f trên đoạn $[a; b]$. Đẳng thức $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$,

mà ta dùng làm định nghĩa tích phân, được tìm ra sau đó bởi hai nhà toán học Niu-tơn và Lai-bơ-nit. Đẳng thức đó cho ta mối liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm và được gọi là công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit.



NGUỒN GỐC CỦA KÍ HIỆU NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Kí hiệu tích phân là do nhà toán học thiên tài người Đức Lai-bơ-nit (1646 – 1716) đưa ra. Tích phân của hàm số f trên đoạn $[a ; b]$ được ông định nghĩa là giới hạn của tổng tích phân.

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k). \qquad (1)$$

Thời Lai-bơ-nit, hiệu $x_{k+1} - x_k$ thường được viết là $\mathrm{d}x_k = x_{k+1} - x_k$ do d là chữ đầu của chữ La-tinh "diferentia" (hiệu số). Do đó, giới hạn (1) được viết lại thành

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\mathrm{d}x_k.$$

Kí hiệu $\sum$ (tổng số) cũng như chữ S có nguồn gốc từ chữ La-tinh "summa" (có nghĩa là tổng số). Dấu tích phân $\int$ là một biến dạng đơn giản của chữ S.

Kí hiệu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ muốn nói rằng đây là *giới hạn của tổng các số hạng* $f(x_k)\,\mathrm{d}x_k$.

Thành thử, giới hạn (1) được kí hiệu là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Công thức $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$ với F là nguyên hàm tuỳ ý của f nêu lên mối liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm và kí hiệu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ được dùng để chỉ các nguyên hàm của f. Việc coi $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ là một nguyên hàm bất kì của f dẫn đến công thức trực quan và tiện lợi là $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b$. Người ta còn gọi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là tích phân xác định và $\int f(x)\mathrm{d}x$ là tích phân bất định (không xác định) của hàm f.

§ 4 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là công thức sau đây.

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u, \qquad (1)$$

trong đó hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K, hàm số $y = f(u)$ liên tục và sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K ; a và b là hai số thuộc K.

Công thức (1) được chứng minh như sau :

Gọi F là nguyên hàm của f. Khi đó vế phải của (1) là $F[u(b)] - F[u(a)]$.

Theo định lí 1 §2, vế trái của (1) là

$$\left(F[u(x)]\right)\Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)].$$

Ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy (1) được chứng minh. □

Công thức (1) được gọi là *công thức đổi biến số*.

Phương pháp đổi biến số thường được áp dụng theo hai cách sau đây.

Cách 1. Giả sử ta cần tính $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Nếu ta viết được $g(x)$ dưới dạng $f[u(x)]u'(x)$, thì theo công thức (1) ta có

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

Vậy bài toán quy về tính $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u$. Trong nhiều trường hợp việc tính tích phân mới này đơn giản hơn.

Ví dụ 1. Tính $\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có $x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} d(x^2)$. Đặt $u = x^2$ ta có $u(1) = 1$, $u(2) = 4$. Do đó

$$\int_1^2 x e^{x^2} dx = \int_1^4 \frac{e^u}{2} du = \frac{1}{2}(e^4 - e).$$

H1 *Tính* $\int_1^3 \sqrt{2x+3}\, dx$ *bằng cách đặt* $u = 2x + 3$.

Cách 2. Giả sử ta cần tính $\int_\alpha^\beta f(x) dx$. Đặt $x = x(t)$ $(t \in K)$ và $a, b \in K$ thoả mãn $\alpha = x(a)$, $\beta = x(b)$ thì công thức (1) cho ta

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = \int_a^b f[x(t)] x'(t) dt.$$

Vậy bài toán quy về tính $\int_a^b g(t) dt$ (ở đó $g(t) = f[x(t)].x'(t)$). Trong nhiều trường hợp, việc tính tích phân mới này đơn giản hơn.

Ví dụ 2. Tính $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Giải

Đặt $x = \sin t$. Ta có $dx = d(\sin t) = \cos t\, dt$, $0 = \sin 0$ và $1 = \sin\frac{\pi}{2}$.

Vậy $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}.\cos t\, dt.$

Vì $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$. Do đó

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

H2 *Tính* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ *bằng cách đặt* $x = \sin t$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Tương tự như phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, ta cũng có phương pháp tích phân từng phần. Cơ sở của phương pháp này là công thức sau đây.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx, \qquad (2)$$

trong đó các hàm số u, v có đạo hàm liên tục trên K và a, b là hai số thuộc K.

Thật vậy, theo định lí 2 §2, ta có

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left(\int u(x)v'(x)\,dx\right)\Big|_a^b = \left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx\right)\Big|_a^b$$

$$= \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \left(\int v(x)u'(x)\,dx\right)\Big|_a^b = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx. \qquad \square$$

Công thức (2) gọi là *công thức tích phân từng phần* và còn được viết dưới dạng $\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$

Ví dụ 3. Tính $\int_0^1 x\,e^x dx.$

Giải. Chọn $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$. Khi đó $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$. Do đó

$$\int_0^1 x e^x\,dx = \left(x e^x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e - 1) = 1.$$

Ví dụ 4. Tính $\int_1^2 x\ln x\,dx.$

Giải. Chọn $u = \ln x$, $dv = x\,dx$. Khi đó $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. Do đó

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

H3 *Tính* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx.$

Câu hỏi và bài tập

17. Dùng phương pháp đổi biến số tính các tích phân sau :

a) $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$; c) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$;

d) $\int_0^1 \frac{5x}{(x^2+4)^2}\,dx$; e) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 3x)\sin 3x\,dx$.

18. Dùng phương pháp tích phân từng phần để tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 x^5 \ln x\,dx$; b) $\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$;

c) $\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Luyện tập

19. Tính a) $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(2+5t^4)\,dt$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\,dx$.

20. Tính a) $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{\frac{1}{4}} \sin t\,dt$; b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

21. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

Khi đó $\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x}\,dx$ là

(A) $F(3) - F(1)$; (B) $F(6) - F(2)$;

(C) $F(4) - F(2)$; (D) $F(6) - F(4)$.

22. Chứng minh rằng

a) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx$; b) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_0^1 [f(x)+f(-x)]\,dx$.

23. Cho $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$. Tính $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$ trong các trường hợp sau :

a) f là hàm số lẻ.; b) f là hàm số chẵn.

24. Tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 x^2 e^{x^3}\,dx$; b) $\int_1^3 \frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx$;

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$; d) $\int_0^1 x^2 e^{3x^3}\,dx$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$.

25. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$; b) $\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x}\,dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$; d) $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$; e) $\int_1^e x^2\ln x\,dx$.

§ 5 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Trong thực tiễn cuộc sống cũng như trong khoa học kĩ thuật, người ta cần phải tính diện tích của những hình phẳng cũng như thể tích của những vật thể phức tạp. Chẳng hạn :

Khi xây dựng một nhà máy thuỷ điện, để tính lưu lượng của dòng sông ta phải tính diện tích thiết diện ngang của dòng sông. Thiết diện đó thường là một hình khá phức tạp.

Khi đóng tàu, các kĩ sư cần xác định thể tích của khoang tàu có hình dạng đặc biệt.

Trước khi phép tính tích phân ra đời, với mỗi hình và mỗi vật thể như vậy người ta lại phải nghĩ ra một cách để tính. Sự ra đời của tích phân cho chúng ta một phương pháp tổng quát để giải hàng loạt những bài toán tính diện tích và thể tích nói trên.

Trong §5 ta nói về ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng và trong §6 nói về ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể.





Trong định lí 1 §3, ta đã biết : Nếu $y = f(x)$ là một hàm liên tục và lấy giá trị không âm trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

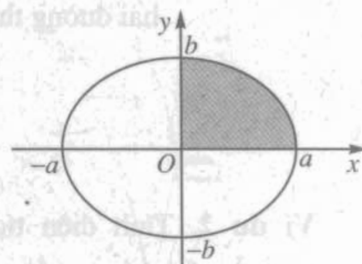
Việc tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong thường được quy về tính diện tích của hình thang cong bằng cách chia hình phẳng đó thành một số hình thang cong.

Ví dụ 1 (*Diện tích hình elip*). Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0).$$

Giải

Ta tính diện tích S của một phần tư hình elip nằm trong góc phần tư thứ nhất. Đó là một hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = a$ (h.3.5).



Hình 3.5

Vậy $S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

Ta tính tích phân trên bằng phương pháp đổi biến số.

Đặt $x = a\sin t$. Ta có

$$dx = d(a\sin t) = a\cos t\,dt,\ 0 = a\sin 0 \text{ và } a = a\sin\frac{\pi}{2}.$$

Do đó

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.a\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t}.a\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt$$

(vì $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$).

Suy ra $S = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}.$

Vậy diện tích hình elip là $4S = \pi ab$.

• Một cách tổng quát, ta có

> Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (1)}$$

Ví dụ 2. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$, đường thẳng $x = 2$, trục tung và trục hoành.

Giải. (h.3.6) Đặt $f(x) = x^3 - 1$.

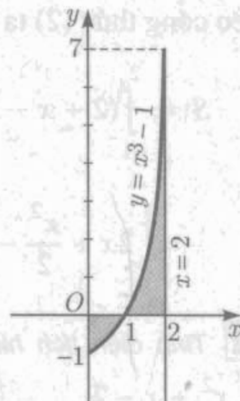
Ta thấy $f(x) \le 0$ trên $[0 ; 1]$ và $f(x) \ge 0$ trên $[1 ; 2]$.

Theo công thức (1), diện tích S của hình đang xét là

$$S = \int_0^2 |x^3 - 1| \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (1 - x^3)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^3 - 1)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{7}{2}.$$

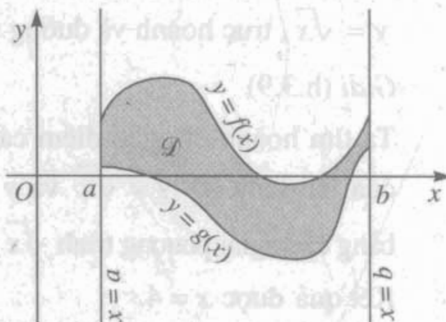


Hình 3.6

H1 *Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành.*

• Để tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (h.3.7), ta có công thức sau :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x. \qquad (2)$$



Hình 3.7

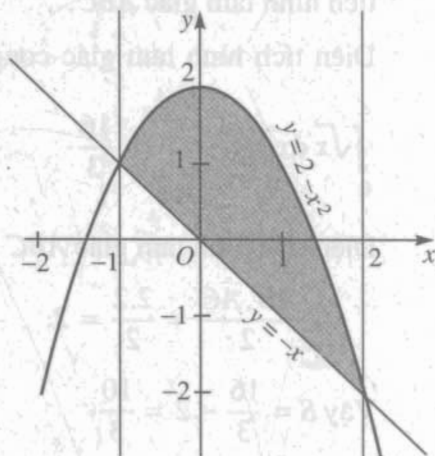
Ví dụ 3. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$.

Giải (h.3.8)

Trước hết, ta tìm hoành độ giao điểm các đồ thị của hai hàm số đã cho bằng cách giải phương trình $2 - x^2 = -x$. Ta có

$$2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x = -1 \text{ và } x = 2.$$

Hình phẳng đang xét giới hạn bởi các đồ thị của hai hàm số $y = 2 - x^2$, $y = -x$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.



Hình 3.8

Theo công thức (2) ta có

$$S = \int_{-1}^{2}(2 + x - x^2)\,dx$$

$$= \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

H2 *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 2$ và parabol $y = x^2 + x - 2$.*

• Để tính diện tích một số hình phẳng phức tạp hơn ta phải chia hình đã cho thành một số hình đơn giản mà ta đã biết cách tính diện tính.

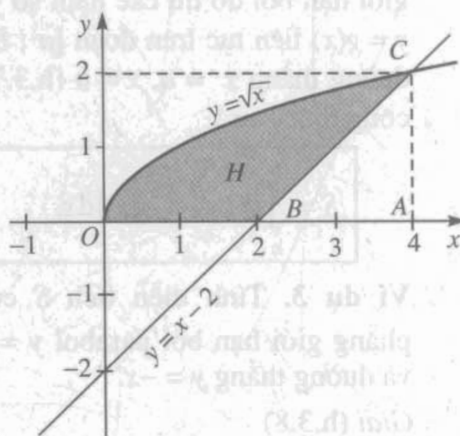
Ví dụ 4. Tính diện tích S của hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y = x - 2$.

Giải (h.3.9)

Ta tìm hoành độ giao điểm các đồ thị của hai hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = x - 2$ bằng cách giải phương trình $\sqrt{x} = x - 2$.

Kết quả được $x = 4$.

Diện tích S của hình H bằng diện tích hình tam giác cong OCA trừ đi diện tích hình tam giác ABC.



Hình 3.9

Diện tích hình tam giác cong OCA là

$$\int_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{4} = \frac{16}{3}.$$

Diện tích hình tam giác ABC là

$$\frac{AB.AC}{2} = \frac{2.2}{2} = 2.$$

Vậy $S = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}.$

CHÚ Ý

Tương tự (bằng cách coi x là hàm của biến y), diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = g(y)$, $x = h(y)$ (g và h là hai hàm liên tục trên đoạn $[c\,;d]$) và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ là

$$S = \int_c^d |g(y) - h(y)|\,dy. \qquad (3)$$

Chẳng hạn trong ví dụ 4, coi hình H là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = y^2$, đường thẳng $x = y + 2$, trục hoành $y = 0$ và đường thẳng $y = 2$. Do đó, ta có thể tính ngay S theo công thức (3) như sau :

$$S = \int_0^2 (y + 2 - y^2)\,dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{10}{3}.$$

Câu hỏi và bài tập

26. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \frac{7\pi}{6}$.

27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = \cos^2 x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \pi$;

b) Đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$;

c) Đồ thị hai hàm số $y = 2x^2$ và $y = x^4 - 2x^2$ trong miền $x \geq 0$.

28. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị các hàm số $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 - 2x$ và hai đường thẳng $x = -3$, $x = -2$;

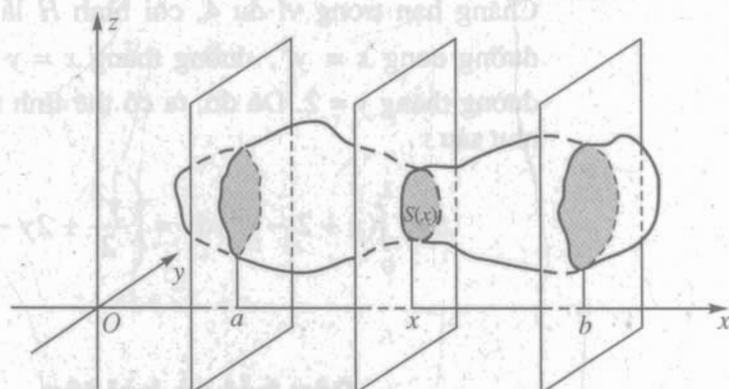
b) Đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 4$ và $y = -x^2 - 2x$;

c) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 4$.

§6 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

1. Tính thể tích của vật thể

Cho một vật thể trong không gian toạ độ $Oxyz$. Gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b.



Hình 3.10

Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a \leq x \leq b)$ (h.3.10).

Giả sử $S = S(x)$ là một hàm số liên tục. Người ta chứng minh được rằng thể tích V của B là

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

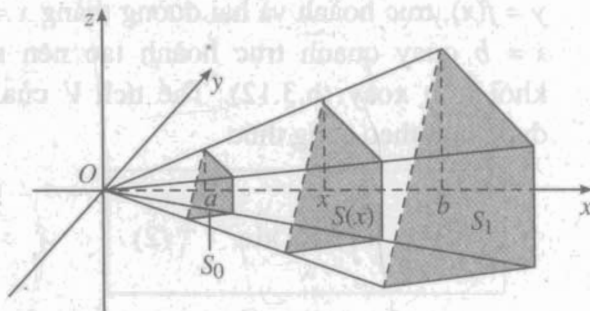
Sử dụng công thức (1) ta tìm được công thức tính thể tích của một số vật thể quen thuộc trong hình học.

Ví dụ 1 (*Thể tích khối chóp cụt*). Cho khối chóp cụt có chiều cao h, diện tích đáy nhỏ và đáy lớn thứ tự là S_0, S_1. Chứng minh rằng thể tích V của nó là

$$V = \frac{h}{3}(S_0 + \sqrt{S_0 S_1} + S_1).$$

Giải

Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, ta đặt khối chóp (sinh ra khối chóp cụt) sao cho đường cao nằm trên trục Ox và đỉnh trùng với gốc toạ độ.



Hình 3.11

Gọi a và b lần lượt là khoảng cách từ O đến đáy nhỏ và đáy lớn, ta có chiều cao của khối chóp cụt là $h = b - a$ (h.3.11). Thiết diện của khối chóp cụt cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a \le x \le b)$ là một đa giác đồng dạng với đáy lớn với tỉ số đồng dạng là $\frac{x}{b}$.

Ta có $\frac{S(x)}{S_1} = \frac{x^2}{b^2}$. Vậy $S(x) = S_1 \frac{x^2}{b^2}$.

Theo công thức (1), ta có

$$V = \int_a^b S_1 \frac{x^2}{b^2} \mathrm{d}x = \frac{S_1(b^3 - a^3)}{3b^2} = \frac{b-a}{3} \cdot \frac{S_1 a^2 + S_1 ab + S_1 b^2}{b^2}$$

$$= \frac{h}{3}\left(\frac{S_1 a^2}{b^2} + \frac{S_1 a}{b} + S_1\right).$$

Để ý rằng $S_0 = S(a) = \frac{S_1 a^2}{b^2}$ và $\frac{S_1 a}{b} = \sqrt{S_1 \frac{S_1 a^2}{b^2}} = \sqrt{S_1 S_0}$ nên $V = \frac{h}{3}(S_0 + \sqrt{S_0 S_1} + S_1)$.

Nhận xét. Khối chóp được coi là khối chóp cụt có $S_0 = 0$. Vì vậy, thể tích V của khối chóp có chiều cao h và diện tích đáy S là

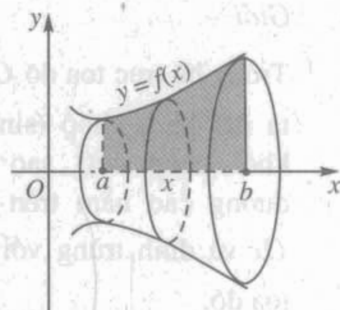
$$V = \frac{Sh}{3}.$$

2. Thể tích khối tròn xoay

Một hình phẳng quay xung quanh một trục nào đó tạo nên một *khối tròn xoay*.

• Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a ; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay (h.3.12). Thể tích V của nó được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \quad (2)$$



Hình 3.12

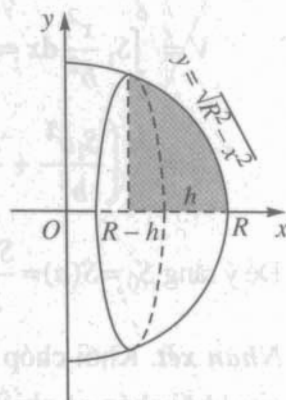
Thật vậy, thiết diện của khối tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ là một hình tròn bán kính $f(x)$. Do đó $S(x) = \pi f^2(x)$. Vì thế, từ công thức (1) ta suy ra công thức (2).

Ví dụ 2 (*Thể tích khối chỏm cầu*). Cho một khối chỏm cầu bán kính R và chiều cao h. Chứng minh rằng thể tích V của khối chỏm cầu là

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Giải

Trong mặt phẳng Oxy, xét hình phẳng giới hạn bởi cung tròn tâm O bán kính R có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và đường thẳng $x = R - h$ $(0 < h \le R)$. Quay hình phẳng đó quanh trục hoành ta thu được khối chỏm cầu bán kính R chiều cao h (h.3.13).



Hình 3.13

Theo công thức (2) thể tích của khối chỏm cầu là

$$V = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}$$

$$= \pi\left[R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2(R-h) + \frac{(R-h)^3}{3}\right] = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Nhận xét

Khối bán cầu bán kính R được coi là khối chỏm cầu bán kính R và chiều cao $h = R$. Vì vậy, thể tích của khối bán cầu bán kính R là

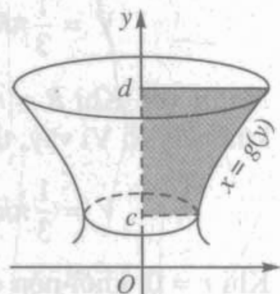
$$V = \pi R^2\left(R - \frac{R}{3}\right) = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Do đó, thể tích hình cầu bán kính R là

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

H *Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó quanh trục hoành.*

• Tương tự, cho đường cong có phương trình $x = g(y)$, trong đó g là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[c\ ;\ d]$. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$, quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay (h.3.14). Thể tích V của nó được tính theo công thức



Hình 3.14

$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (3)$$

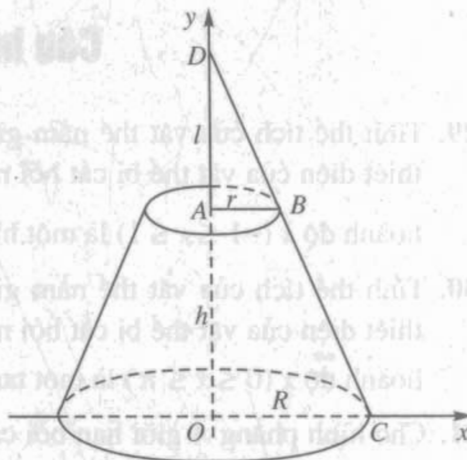
Thật vậy, từ công thức (2) bằng cách xem x là hàm của biến y ta suy ra công thức (3). □

Ví dụ 3 (*Thể tích khối nón cụt*). Cho khối nón cụt có chiều cao h, bán kính đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là R và r. Chứng minh rằng thể tích V của khối nón cụt đó là

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

Giải

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét hình thang vuông $OABC$ với $OA = h$, $AB = r$ và $OC = R$ (h.3.15). Quay hình thang đó quanh trục Oy ta được khối nón cụt đã cho.



Hình 3.15

Giả sử BC kéo dài cắt Oy tại D. Đặt $AD = l$, $OD = a$. Ta có $a - l = h$. Phương trình đường thẳng BC là $x = \dfrac{R(a-y)}{a}$. Theo công thức (3) ta có

$$V = \pi\int_0^h \frac{R^2(a-y)^2}{a^2}dy = \frac{\pi R^2}{3a^2}(a^3 - l^3)$$

$$= \frac{\pi R^2}{3a^2}(a-l)(a^2 + al + l^2) = \frac{\pi R^2 h}{3}\left[1 + \frac{l}{a} + \left(\frac{l}{a}\right)^2\right].$$

Vì $\dfrac{l}{a} = \dfrac{r}{R}$ nên khi thay $\dfrac{l}{a}$ bởi $\dfrac{r}{R}$ ta được

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h\left[1 + \frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2). \qquad \square$$

Nhận xét. Khi $R = r$, khối nón cụt trở thành khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy R. Vì vậy, thể tích của khối trụ là

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R^2 + R^2) = \pi R^2 h.$$

Khi $r = 0$, khối nón cụt trở thành khối nón có chiều cao h và bán kính đáy R. Vì vậy, thể tích của khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Câu hỏi và bài tập

29. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

30. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

31. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = 4$ và $y = \sqrt{x} - 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

32. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \frac{2}{y}$, $x = 0$, $y = 1$ và $y = 4$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.

33. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{5}y^2$, $x = 0$, $y = -1$ và $y = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.



1. AI LÀ NGƯỜI PHÁT MINH RA PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN ?

Cùng với phép tính vi phân, phép tính tích phân là một thành tựu lớn của trí tuệ nhân loại. Nó đã tạo nên một bước ngoặt lớn trong sự phát triển của khoa học và trở thành một công cụ sắc bén, đầy sức mạnh được các nhà khoa học sử dụng rộng rãi trong nghiên cứu cũng như trong ứng dụng thực tiễn.

Phép tính vi phân và tích phân do hai nhà bác học lớn là Niu-tơn (I. Newton 1643 – 1727), người Anh và Lai-bơ-nit (G. Leibniz 1646 – 1716), người Đức, sáng tạo ra đồng thời và độc lập với nhau.

Thực ra đây là một cuộc chạy tiếp sức của nhiều thế hệ các nhà bác học xuất sắc trong nhiều thế kỉ. Trước Niu-tơn và Lai-bơ-nit hai nghìn năm, nhà bác học Ác-si-mét đã có ý tưởng đầu tiên về phép tính tích phân. Trong bức thư gửi người bạn, ông đã đưa ra một phương pháp mới gọi là "phương pháp vét cạn" và đã sử dụng nó để giải nhiều bài toán tính diện tích, thể tích, chiều dài cung. Đó là tiền thân của phép tính tích phân. Sau ông nhiều nhà toán học khác cũng tham gia mở đường cho sự ra đời của tích phân, trong đó phải kể đến những đóng góp xuất sắc của các nhà khoa học như J. Kê-ple (J. Kepler), Ca-va-li-ơ-ri (B. Cavalieri), Phéc-ma, Đề-các, Ba-râu (I. Barrow).

Ngày nay các nhà nghiên cứu đều nhất trí rằng về mặt thời gian, Niu-tơn khám phá ra phép vi tính vi - tích phân trước Lai-bơ-nit khoảng 10 năm nhưng Lai-bơ-nit lại cho công bố công khai công trình của mình trước Niu-tơn tới ba năm. Về hình thức, phép tính tích phân của Niu-tơn và phép tính tích phân của Lai-bơ-nit khác nhau rõ rệt. Niu- tơn trình bày các kết quả của mình dưới ngôn ngữ Hình học, còn Lai-bơ-nit dùng ngôn ngữ Đại số. Các kí hiệu của Lai-bơ-nit phong phú và thuận tiện hơn nhiều so với các kí hiệu của Niu-tơn (dấu tích phân và các kí hiệu vi phân, đạo hàm mà chúng ta dùng ngày nay là của Lai-bơ-nit). Về sự kết hợp giữa phép tính vi – tích phân với các nghiên cứu về khoa học tự nhiên thì Lai-bơ-nit không sâu sắc bằng Niu-tơn nhưng đứng trên góc độ toán học thì phép tính vi - tích phân của Lai-bơ-nit thể hiện một tầm nhìn bao quát hơn, một trí tưởng tượng tinh tế hơn.

2. VÀI NÉT VỀ CUỘC ĐỜI VÀ SỰ NGHIỆP CỦA NIU-TƠN VÀ LAI-BƠ-NIT


Isaac Newton
(1643 – 1727)

1) Niu-tơn (1643 – 1727) là nhà toán học, vật lí học, cơ học và thiên văn học vĩ đại người Anh. Ông sinh ra ở một vùng quê ở nước Anh. Người cha qua đời trước khi ông ra đời. Người mẹ vì quá đau buồn nên sinh ông thiếu tháng. Lúc mới sinh ông bé tới mức đặt được vào một chiếc cốc to. Không ai ngờ rằng đứa bé quặt quẹo như vậy lại có thể thọ tới 85 tuổi và trở thành một nhà khoa học vĩ đại như vậy.

Niu-tơn được người đương thời mô tả là có tầm vóc trung bình, béo chắc, đầu luôn đội tóc giả, có đôi mắt sáng và thông minh. Ông sống rất giản dị, khiêm nhường, say mê với công việc và rất đãng trí.


Gottfried Leibniz
(1646 – 1716)

2) Lai-bơ-nit (1646 – 1716) là nhà toán học, vật lí học, triết học thiên tài người Đức. Ông sinh ở thành phố Lai-xích (Leipzig), là con trai một giáo sư triết học. Từ lúc 6 tuổi ông đã suốt ngày mê mải đọc sách. Năm ông 7 tuổi thì cha ông qua đời. Năm 15 tuổi ông đã vào đại học và học về luật học, triết học và toán học. Năm 20 tuổi (năm 1666) ông đã bảo vệ luận án tiến sĩ luật học đồng thời cũng công bố công trình toán học đầu tiên của mình với nhan đề : "Những suy nghĩ về nghệ thuật tổ hợp". Sau đó ông được bổ nhiệm làm quan chức ngoại giao tại Pháp.

Những cống hiến về toán học chỉ là một phần nhỏ trong sự nghiệp của ông. Ở thời đại ông, người ta biết đến ông như một nhà ngoại giao, nhà luật học và nhà triết học. Ông biết rất nhiều ngoại ngữ và hầu hết các kiến thức của ông đều có được bằng con đường tự học.

Lai-bơ-nit được người đương thời mô tả là có thể trạng gày gò, tầm thước, da xanh và cũng luôn đeo tóc giả. Trí nhớ của ông cũng khác người thường : Những điều khó hiểu được ông nhớ rất tốt nhưng những điều dễ hiểu thì ông lại quên ngay.

Luyện tập

34. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị các hàm số $y = x$, $y = 1$ và $y = \dfrac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$;

b) Đồ thị hai hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$, trục tung và đường thẳng $x = 1$;

c) Đồ thị các hàm số $y = x^2$, $y = 4x - 4$ và $y = -4x - 4$.

35. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 1$ và $y = 3 - x$;

b) Các đường $x = y^3$, $y = 1$ và $x = 8$;

c) Đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ và trục hoành.

36. Tính thể tích của vật thể T nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \le x \le \pi$) là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

37. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

38. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{4}$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

39. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

40. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{2\sin 2y}$, $x = 0$, $y = 0$ và $y = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau (từ bài 41 đến bài 43) :

41. a) $y = 2x(1 - x^{-3})$;

b) $y = 8x - \dfrac{2}{x^{\frac{1}{4}}}$;

c) $y = x^{\frac{1}{2}}\sin(x^{\frac{3}{2}} + 1)$;

d) $y = \dfrac{\sin(2x + 1)}{\cos^2(2x + 1)}$.

42. a) $y = \dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$;

b) $y = x^3(1 + x^4)^3$;

c) $y = \dfrac{xe^{2x}}{3}$;

d) $y = x^2e^x$.

43. a) $y = xe^{-x}$; b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

44. Tìm hàm số $y = f(x)$ nếu biết $dy = 12x(3x^2 - 1)^3 dx$ và $f(1) = 3$.

45. Xác định số b dương để tích phân $\int_0^b (x - x^2)\,dx$ có giá trị lớn nhất.

46. Cho biết $\int_1^9 f(x)\,dx = -1$, $\int_7^9 f(x)\,dx = 5$, $\int_7^9 g(x)\,dx = 4$. Hãy tìm

a) $\int_1^9 -2f(x)\,dx$; b) $\int_7^9 [f(x) + g(x)]\,dx$;

c) $\int_7^9 [2f(x) - 3g(x)]\,dx$; d) $\int_1^7 f(x)\,dx$.

47. Cho hàm số f liên tục trên $[a ; b]$. Tỉ số

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

được gọi là *giá trị trung bình của hàm số f trên* $[a ; b]$ và được kí hiệu là $m(f)$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in [a ; b]$ sao cho $m(f) = f(c)$.

48. Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t = 0$ (s) chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5 - t)$ (m/s). Tìm quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại.

49. Một chất điểm A xuất phát từ vị trí O, chuyển động thẳng nhanh dần đều ; 8 giây sau nó đạt đến vận tốc 6m/s. Từ thời điểm đó nó chuyển động thẳng đều. Một chất điểm B xuất phát từ cùng vị trí O nhưng chậm hơn 12 giây so với A và chuyển động thẳng nhanh dần đều. Biết rằng B đuổi kịp A sau 8 giây (kể từ lúc B xuất phát). Tìm vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A.

50. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x\,dx$; b) $\int_1^2 x(2x^2 + 1)\,dx$; c) $\int_2^3 (x - 1)e^{x^2 - 2x}\,dx$.

51. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị các hàm số $y = 4 - x^2$, $y = -x + 2$;

b) Các đường cong có phương trình $x = 4 - 4y^2$ và $x = 1 - y^4$ trong miền $x \geq 0$.

52. Tính diện tích của các hình phẳng giới hạn bởi :

a) Parabol $y = x^2 - 2x + 2$, tiếp tuyến của nó tại điểm $M(3 ; 5)$ và trục tung ;

b) Parabol $y = -x^2 + 4x - 3$ và các tiếp tuyến của nó tại các điểm $A(0 ; -3)$ và $B(3 ; 0)$.

53. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq 2)$ là một nửa hình tròn đường kính $\sqrt{5}\,x^2$.

54. Xét hình phẳng giới hạn bởi đường hypebol $y = \dfrac{2}{x}$ và các đường thẳng $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó quanh trục tung.

55. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\cos x}\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ và hai trục toạ độ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay A quanh trục hoành.

56. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong có phương trình $x(y + 1) = 2$ và các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay A quanh trục tung.

57. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong có phương trình $x - y^2 = 0$ và các đường thẳng $y = 2$, $x = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay A

a) Quanh trục hoành ; b) Quanh trục tung.

58. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay A quanh trục hoành.

59. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong có phương trình $y^2 = x^3$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$ trong miền $y \geq 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay A

a) Quanh trục hoành ; b) Quanh trục tung.

Bài tập trắc nghiệm khách quan

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

60. Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$. Giá trị của c là

(A) 9 ; (B) 3 ; (C) 81 ; (D) 8.

61. Giá trị của $\int_0^2 2e^{2x}dx$ là

(A) e^4 ; (B) $e^4 - 1$; (C) $4e^4$; (D) $3e^4 - 1$.

62. Giá trị của $\int_{-1}^0 x^2(x+1)^3 dx$ là

(A) $-\frac{7}{70}$; (B) $-\frac{1}{60}$; (C) $\frac{2}{15}$; (D) $\frac{1}{60}$.

63. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi đường thẳng $y = 4x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là

(A) 4 ; (B) 5 ; (C) 3 ; (D) 3,5.

64. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi hai đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là

(A) 12 ; (B) 15,75 ; (C) 6,75 ; (D) 4 .

65. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi đường thẳng $y = 2x$ và đồ thị hàm số $y = x^2$ là

(A) $\frac{4}{3}$; (B) $\frac{3}{2}$; (C) $\frac{5}{3}$; (D) $\frac{23}{15}$.

66. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = 6 - |x|$. Thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay A xung quanh trục tung là

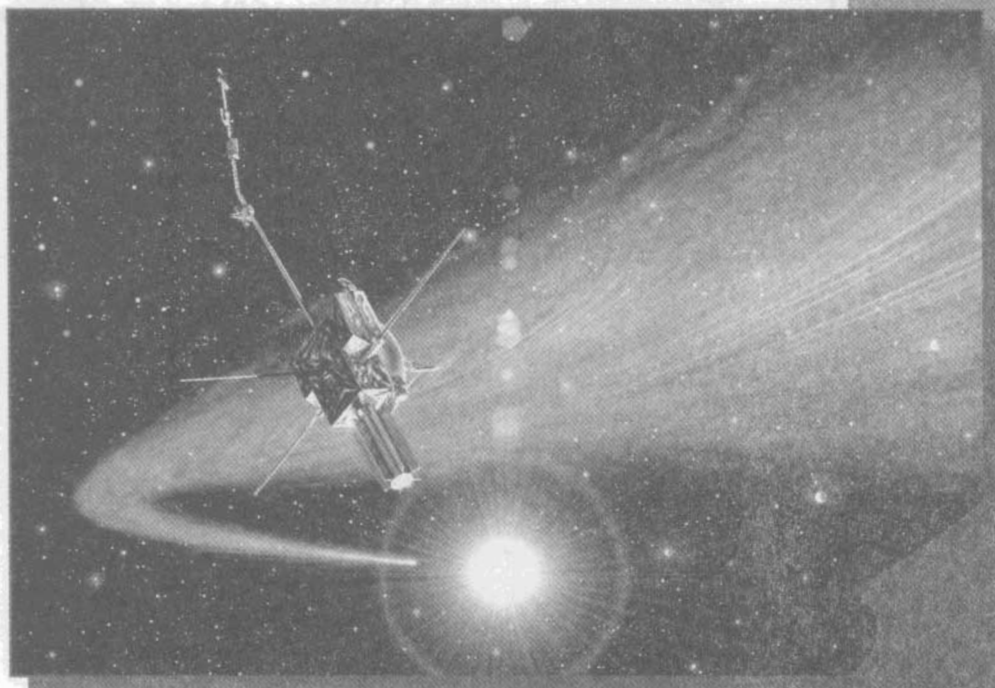
(A) $\frac{32\pi}{3}$; (B) 9π ; (C) 8π ; (D) $\frac{20\pi}{3}$.

67. Cho a, b là hai số dương. Gọi K là hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ hai, giới hạn bởi parabol $y = ax^2$ và đường thẳng $y = -bx$. Thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay K xung quanh trục hoành là một số không phụ thuộc vào giá trị của a và b nếu a và b thoả mãn điều kiện sau

(A) $b^4 = 2a^5$; (B) $b^3 = 2a^5$; (C) $b^5 = 2a^3$; (D) $b^4 = 2a^2$.

Chương IV

SỐ PHỨC



Chương này cho ta biết tập hợp **số phức**, một tập hợp số chứa tập hợp số thực, với các quy tắc tính toán tương tự, trong đó mọi số thực âm đều có căn bậc hai, mọi phương trình bậc hai đều có nghiệm. Ta còn biết nhiều ứng dụng khác của số phức trong đại số, trong hình học và trong lượng giác.

Học sinh cần rèn luyện kĩ năng tính toán với số phức, hiểu ý nghĩa của việc xây dựng tập hợp số phức và giải được một số bài tập đơn giản về số phức.

§ 1 SỐ PHỨC

1. Khái niệm số phức

Ta đã biết rằng các phương trình $x^2 + 1 = 0, x^2 + 4 = 0$ không có nghiệm thực. Một cách tổng quát các phương trình bậc hai với hệ số thực $Ax^2 + Bx + C = 0$ mà biệt thức $\Delta < 0$, chẳng hạn $x^2 - 2x + 2 = 0$ (biệt thức $\Delta = -4$), đều không có nghiệm thực.

Sự phát triển của toán học, khoa học đòi hỏi phải mở rộng tập hợp các số thực thành một tập hợp số mới gọi là tập hợp các số phức, trong đó có các phép toán cộng và nhân với các tính chất tương tự phép toán cộng và nhân số thực sao cho các phương trình nói trên đều có nghiệm.

Muốn thế, người ta đưa ra số i sao cho bình phương của nó bằng -1. Khi đó i là một nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ và $2i$ là một nghiệm của phương trình $x^2 + 4 = 0$; còn $1 + i$ là một nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + 2 = 0$, tức là phương trình $(x-1)^2 + 1 = 0$,... Các số $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) gọi là các số phức.

Với các số phức, người ta còn chứng minh được rằng mọi phương trình bậc 2, 3, 4, ... đều có nghiệm (phức). Số phức cũng liên quan chặt chẽ với hình học phẳng, với lượng giác , ... (xem bài Em có biết "Vài nét lịch sử phát triển số phức", trang 197).

ĐỊNH NGHĨA 1

> Một **số phức** là một biểu thức dạng $a + bi$, trong đó a và b là những số thực và số i thoả mãn $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.
>
> i được gọi là *đơn vị ảo*, a được gọi là *phần thực* và b được gọi là *phần ảo* của số phức $z = a + bi$.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

CHÚ Ý

Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $a + 0i = a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là *số ảo* (còn gọi là số thuần ảo) : $z = 0 + bi = bi$ $(b \in \mathbb{R})$; $i = 0 + 1i = 1i$.

Số $0 = 0 + 0i = 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

Ví dụ 1

Số phức $z = 2 + \sqrt{3}i$ có phần thực bằng 2, phần ảo bằng $\sqrt{3}$.

Số phức $z = -i$ (tức là $(-1)i$) có phần thực bằng 0, phần ảo bằng -1 ; đó là một số ảo.

ĐỊNH NGHĨA 2

Hai số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $z' = a' + b'i$ $(a', b' \in \mathbb{R})$ gọi là **bằng nhau** nếu

$$a = a',\ b = b'.$$

Khi đó ta viết $z = z'$.

H1 *Khi nào số phức $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ bằng 0 ?*

2. Biểu diễn hình học số phức

Ta đã biết biểu diễn hình học các số thực bởi các điểm trên một trục số.

Đối với các số phức, ta hãy xét mặt phẳng toạ độ Oxy. Mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M có toạ độ $(a ; b)$. Ngược lại, rõ ràng mỗi điểm $M(a ; b)$ biểu diễn một số phức là $z = a + bi$. Ta còn viết $M(a + bi)$ hay $M(z)$.

Vì lẽ đó, mặt phẳng toạ độ với việc biểu diễn số phức như thế được gọi là *mặt phẳng phức*.

Gốc toạ độ O biểu diễn số 0.

Các điểm trên trục hoành Ox biểu diễn các số thực, do đó trục Ox còn được gọi là *trục thực*.

Các điểm trên trục tung Oy biểu diễn các số ảo, do đó trục Oy còn được gọi là *trục ảo*.

Trên hình 4.1 có các điểm O, A, B, C, D, E, F theo thứ tự biểu diễn các số phức $0, 1, i, -2, -2i, 1 + 2i, 2 - i$.



Hình 4.1

3. Phép cộng và phép trừ số phức

a) Tổng của hai số phức

ĐỊNH NGHĨA 3

Tổng của hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức

$$z + z' = a + a' + (b + b')i.$$

Như vậy, để cộng hai số phức, ta cộng các phần thực với nhau, cộng các phần ảo với nhau.

Ví dụ 2. Ta có $(3 + i) + (2 - 3i) = 5 - 2i$;

$(1 - 2i) + (2 + 2i) = 3$;

$(2 - 2i) + (-2 + 3i) = i$.

b) Tính chất của phép cộng số phức

Từ định nghĩa 3, dễ thấy phép cộng các số phức có các tính chất sau đây, tương tự phép cộng các số thực.

• Tính chất kết hợp :

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'') \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

• Tính chất giao hoán :

$$z + z' = z' + z \text{ với mọi } z, z' \in \mathbb{C}.$$

• Cộng với 0 :

$$z + 0 = 0 + z = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

• Với mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Số $-z$ được gọi là *số đối* của số phức z.

H2 *Trong mặt phẳng phức, cho điểm M biểu diễn số z. Hãy tìm điểm biểu diễn số −z.*

c) Phép trừ hai số phức

ĐỊNH NGHĨA 4

> **Hiệu của hai số phức** z và z' là tổng của z với $-z'$, tức là
> $$z - z' = z + (-z').$$

Nếu $z = a + bi,\ z' = a' + b'i\ \ (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ thì

$$z - z' = a - a' + (b - b')i.$$

d) Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Trong mặt phẳng phức, ta đã coi điểm M có toạ độ $(a\ ;\ b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$. Ta cũng coi mỗi vectơ $\vec{u}$ có toạ độ $(a\ ;\ b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$.

Khi đó, nói điểm M biểu diễn số phức z cũng có nghĩa là vectơ $\overrightarrow{OM}$ biểu diễn số phức đó.

Dễ thấy rằng, nếu $\vec{u}, \vec{u}'$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì

$\vec{u} + \vec{u}'$ biểu diễn số phức $z + z'$,

$\vec{u} - \vec{u}'$ biểu diễn số phức $z - z'$.

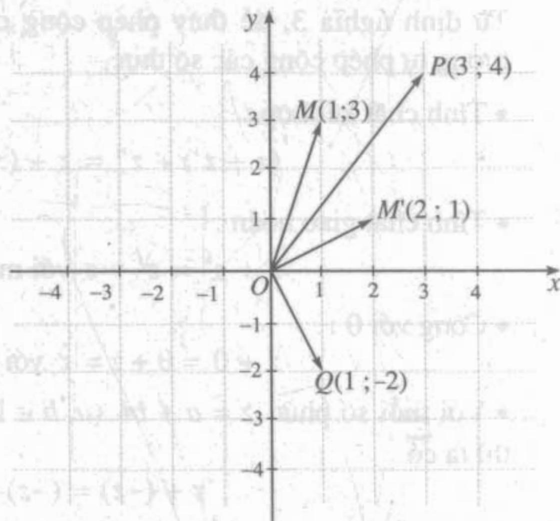
Ví dụ 3. Quan sát hình 4.2, ta thấy :

Vectơ $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ có toạ độ $(1\ ;\ 3)$ biểu diễn số phức $z = 1 + 3i$;

Vectơ $\overrightarrow{OM'} = \vec{u}'$ có toạ độ $(2\ ;\ 1)$ biểu diễn số phức $z' = 2 + i$;

Vectơ $\overrightarrow{OP} = \vec{u} + \vec{u}'$ có toạ độ $(3\ ;\ 4)$ biểu diễn số phức $z + z' = 3 + 4i$;

Vectơ $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{MM'} = \vec{u}' - \vec{u}$ có toạ độ $(1\ ;\ -2)$ biểu diễn số phức $z' - z = 1 - 2i$.



Hình 4.2

4. Phép nhân số phức

a) Tích của hai số phức

Cho hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$. Thực hiện phép nhân một cách hình thức biểu thức $a + bi$ với biểu thức $a' + b'i$, rồi thay $i^2 = -1$, ta được

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' + bb'i^2 + (ab' + a'b)i$$
$$= aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

Điều đó dẫn ta đến định nghĩa sau đây.

ĐỊNH NGHĨA 5

Tích của hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức

$$zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

Ví dụ 4. Ta có

$$(2 - i)(1 + 2i) = (2 + 2) + (4 - 1)i = 4 + 3i\ ;$$
$$(2 + i)(2 - i) = (4 + 1) + (-2 + 2)i = 5\ ;$$
$$(2 + i)(1 + 2i) = (2 - 2) + (4 + 1)i = 5i\ .$$

Nhận xét. Với mọi số thực k và mọi số phức $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có

$$k(a + bi) = (k + 0i)(a + bi) = ka + kbi\ ,$$

đặc biệt $0z = 0$ với mọi số phức z.

H3 *Nếu vectơ $\vec{u}$ biểu diễn số phức z thì vectơ $k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$ biểu diễn số phức nào ? Vì sao ?*

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng phức, nếu điểm M biểu diễn số phức z, điểm M' biểu diễn số phức z' (M khác M') thì trung điểm P của đoạn thẳng MM' biểu diễn số phức $\frac{1}{2}(z + z')$. Điều đó suy ra từ hệ thức $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'})$.

H4 *Xét số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Tính z^2 và tìm tập hợp các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho z^2 là số thực.*

b) Tính chất của phép nhân số phức

Từ định nghĩa 5, dễ thấy rằng phép nhân các số phức có các tính chất sau đây tương tự phép nhân các số thực.

- Tính chất giao hoán :

$$zz' = z'z \text{ với mọi } z, z' \in \mathbb{C}.$$

- Tính chất kết hợp :

$$(zz')z'' = z(z'z'') \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

- Nhân với 1 :

$$1.z = z.1 = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

- Tính chất phân phối (của phép nhân đối với phép cộng) :

$$z(z' + z'') = zz' + zz'' \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Từ các tính chất nói trên ta có thể thực hiện phép toán cộng và nhân các số phức theo các quy tắc như phép toán cộng và nhân các số thực.

Ví dụ 6. $(z + z')(z - z') = zz + z'z - zz' - z'z' = z^2 - z'^2$;

$$(z + z')(z + z') = (z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \text{ ;}$$

$$(bi)^2 = b^2i^2 = -b^2 \ (b \in \mathbb{R}) \text{ ;}$$

$$i^3 = i^2.i = -i, \ i^4 = i^2.i^2 = 1, \ i^5 = i \text{ ;}$$

$$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i.$$

H5 *Hãy phân tích $z^2 + 4$ thành nhân tử.*

5. Số phức liên hợp và môđun của số phức

a) Số phức liên hợp

ĐỊNH NGHĨA 6

> **Số phức liên hợp** của $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là $a - bi$ và được kí hiệu bởi $\overline{z}$.

Như vậy

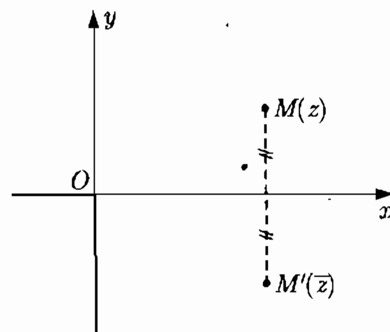
$$\overline{\overline{z}} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Ví dụ 7. $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$;

$\overline{-4 - \sqrt{2}i} = -4 + \sqrt{2}i$;

$\overline{i} = -i$;

$\overline{-i} = i.$



Hình 4.3

• Rõ ràng $\overline{\overline{z}} = z$ nên người ta còn nói z và $\overline{z}$ là *hai số phức liên hợp với nhau* (gọi tắt là *hai số phức liên hợp*).

Hai số phức liên hợp khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng với nhau qua trục thực Ox (h.4.3).

H6 *Chứng minh rằng số phức z là số thực khi và chỉ khi* $z = \overline{z}$.

• Từ định nghĩa 6, dễ suy ra :

Với mọi số phức z, z', ta có

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} ;$$

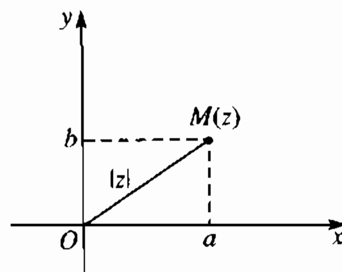
$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

H7 *Chứng minh rằng với mọi số phức* $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, *ta có* $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

b) Môđun của số phức

Ta đã biết giá trị tuyệt đối của số thực a là khoảng cách từ điểm biểu diễn a đến gốc toạ độ trên trục số. Dễ thấy rằng khoảng cách từ điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ đến gốc toạ độ O của mặt phẳng phức là

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} \text{ (h.4.4).}$$



Hình 4.4

ĐỊNH NGHĨA 7

Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$ và được kí hiệu là $|z|$.

Như vậy

> Nếu $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ví dụ 8. $|i| = 1$; $|1 + 2i| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Nhận xét

1) Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.

2) $z = 0$ khi và chỉ khi $|z| = 0$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z sao cho $|z| = 1$ là đường tròn bán kính 1 với tâm tại gốc toạ độ.

H8 *Chứng minh rằng $|\overline{z}| = |z|$ với mọi số phức z.*

6. Phép chia cho số phức khác 0

H9 *Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ khác 0. Chứng minh rằng số $z^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(a - bi) = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$ là số thoả mãn $zz^{-1} = 1$.*

ĐỊNH NGHĨA 8

> **Số nghịch đảo** của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$.
>
> **Thương** $\dfrac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z, tức là $\dfrac{z'}{z} = z'z^{-1}$.

Như vậy

> Nếu $z \neq 0$ thì $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

CHÚ Ý

Do $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}$ nên để tính $\dfrac{z'}{z}$ ta chỉ việc nhân cả tử số và mẫu số với $\overline{z}$.

Ví dụ 10

$$\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-4i}{2}=1-2i\ ;$$

$$\frac{\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-2i}=\frac{(\sqrt{2}+2i)(\sqrt{2}+2i)}{(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)}=\frac{(\sqrt{2}+2i)^2}{(\sqrt{2})^2+2^2}=\frac{-2+4\sqrt{2}i}{6}=\frac{-1+2\sqrt{2}i}{3};$$

$$\frac{1}{i}=-i.$$

Nhận xét

1) Với $z \neq 0$, ta có $\frac{1}{z}=1.z^{-1}=z^{-1}$.

2) Dễ thấy rằng thương $\frac{z'}{z}$ là số phức w sao cho $zw=z'$. Từ đó có thể nói phép chia (cho số phức khác 0) là phép toán ngược của phép nhân.

H10 *Tìm số phức z thoả mãn* $(1+2i)z=3z-i$.

Câu hỏi và bài tập

1. Cho các số phức

$$2+3i\ ;\ 1+2i\ ;\ 2-i.$$

a) Biểu diễn các số đó trong mặt phẳng phức.

b) Viết số phức liên hợp của mỗi số đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.

c) Viết số đối của mỗi số phức đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.

2. Xác định phần thực và phần ảo của mỗi số sau :

a) $i+(2-4i)-(3-2i)$; b) $(\sqrt{2}+3i)^2$;

c) $(2+3i)(2-3i)$; d) $i(2-i)(3+i)$.

3. Xác định các số phức biểu diễn bởi các đỉnh của một lục giác đều có tâm là gốc toạ độ O trong mặt phẳng phức, biết rằng một đỉnh biểu diễn số i.

4. Thực hiện phép tính

$$\frac{1}{2-3i}\ ;\quad \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\ ;\quad \frac{3-2i}{i}\ ;\quad \frac{3-4i}{4-i}.$$

5. Cho $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Hãy tính : $\frac{1}{z}$; $\overline{z}$; z^2 ; $(\overline{z})^3$; $1 + z + z^2$.

6. Chứng minh rằng :

a) Phần thực của số phức z bằng $\frac{1}{2}(z + \overline{z})$, phần ảo của số phức z bằng $\frac{1}{2i}(z - \overline{z})$;

b) Số phức z là số ảo khi và chỉ khi $z = -\overline{z}$;

c) Với mọi số phức z, z', ta có $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$, và nếu $z \neq 0$ thì $\frac{\overline{z'}}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}$.

7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m > 0$, ta có

$$i^{4m} = 1 \ ; \ i^{4m+1} = i \ ; \ i^{4m+2} = -1 \ ; \ i^{4m+3} = -i.$$

8. Chứng minh rằng :

a) Nếu vectơ $\vec{u}$ của mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thì độ dài của vectơ $\vec{u}$ là $|\vec{u}| = |z|$, và từ đó nếu các điểm A_1, A_2 theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2 thì $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = |z_2 - z_1|$;

b) Với mọi số phức z, z', ta có $|zz'| = |z||z'|$ và khi $z \neq 0$ thì $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$;

c) Với mọi số phức z, z', ta có $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

9. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

a) $|z - i| = 1$; b) $\left|\frac{z - i}{z + i}\right| = 1$; c) $|z| = |\overline{z} - 3 + 4i|$.

Luyện tập

10. Chứng minh rằng với mọi số phức $z \neq 1$, ta có

$$1 + z + z^2 + ... + z^9 = \frac{z^{10} - 1}{z - 1}.$$

11. Hỏi mỗi số sau đây là số thực hay số ảo (z là số phức tuỳ ý cho trước sao cho biểu thức xác định) ?

$$z^2 + (\overline{z})^2\ ; \qquad \frac{z - \overline{z}}{z^3 + (\overline{z})^3}\ ; \qquad \frac{z^2 - (\overline{z})^2}{1 + z\overline{z}}.$$

12. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

a) z^2 là số thực âm ; b) z^2 là số ảo ;

c) $z^2 = (\overline{z})^2$; d) $\frac{1}{z - i}$ là số ảo.

13. Tìm nghiệm phức của các phương trình sau :

a) $iz + 2 - i = 0$; b) $(2 + 3i)z = z - 1$;

c) $(2 - i)\overline{z} - 4 = 0$; d) $(iz - 1)(z + 3i)(\overline{z} - 2 + 3i) = 0$;

e) $z^2 + 4 = 0$.

14. a) Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi $z \neq i$, hãy tìm phần thực và phần ảo của số phức $\frac{z + i}{z - i}$.

b) Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện $\frac{z + i}{z - i}$ là số thực dương.

15. a) Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Hỏi trọng tâm của tam giác ABC biểu diễn số phức nào ?

b) Xét ba điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thoả mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

16. *Đố vui.* Trong mặt phẳng phức cho các điểm : O (gốc toạ độ), A biểu diễn số 1, B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz'.

Hai tam giác OAB, $OA'B'$ có phải là hai tam giác đồng dạng không ?

§ 2 CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Căn bậc hai của số phức

ĐỊNH NGHĨA

Cho số phức w. Mỗi số phức z thoả mãn $z^2 = w$ được gọi là một **căn bậc hai** của w.

Nói cách khác, mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình $z^2 - w = 0$ (với ẩn z).

Có thể tìm căn bậc hai của số phức w như sau :

a) Trường hợp w là số thực

Dễ thấy rằng căn bậc hai của 0 là 0.

Xét số thực $w = a \neq 0$,

Khi $a > 0$ thì $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$. Do đó, $z^2 - a = 0$ khi và chỉ khi $z = \sqrt{a}$ hoặc $z = -\sqrt{a}$. Vậy a có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

Khi $a < 0$ thì $z^2 - a = (z - \sqrt{-a}\,i)(z + \sqrt{-a}\,i)$. Do đó, $z^2 - a = 0$ khi và chỉ khi $z = \sqrt{-a}\,i$ hoặc $z = -\sqrt{-a}\,i$. Vậy a có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\,i$ và $-\sqrt{-a}\,i$.

Ví dụ 1. Hai căn bậc hai của -1 là i và $-i$.

Hai căn bậc hai của $-a^2$ (a là số thực khác 0) là ai và $-ai$.

b) Trường hợp $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $b \neq 0$

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là

$$(x + yi)^2 = a + bi.$$

Do $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ nên $z^2 = w$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Vậy để tìm các căn bậc hai của $w = a + bi$ ta cần giải hệ phương trình này.

Mỗi cặp số thực $(x\ ;\ y)$ nghiệm đúng hệ phương trình đó cho ta một căn bậc hai $x + yi$ của số phức $a + bi$.

Ví dụ 2

a) Tìm các căn bậc hai của $-5 + 12i$, tức là tìm các số phức $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ sao cho $(x + yi)^2 = -5 + 12i$ nên ta cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Phương trình thứ hai cho $y = \dfrac{12}{2x} = \dfrac{6}{x}$, thay vào phương trình thứ nhất, ta có :

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{6}{x}. \end{cases}$$

Hệ này có hai nghiệm $(2\ ;\ 3)\ ;\ (-2\ ;\ -3)$.

Vậy có hai căn bậc hai của $-5 + 12i$ là $2 + 3i$ và $-2 - 3i$.

b) Tìm các căn bậc hai của i tức là tìm $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ sao cho $(x + yi)^2 = i$ nên ta cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

Dễ thấy nó có hai nghiệm $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vậy i có hai căn bậc hai là $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

• Một cách tổng quát, có thể chứng minh rằng

* Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0.

* Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0).

Đặc biệt, số thực a dương có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$; số thực a âm có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\,i$ và $-\sqrt{-a}\,i$.

H1 *Biết một căn bậc hai của w_1 là z_1 và một căn bậc hai của w_2 là z_2. Hãy tìm tất cả các căn bậc hai của $w_1 w_2$.*

2. Phương trình bậc hai

Nhờ tính được căn bậc hai của số phức, dễ thấy mọi phương trình bậc hai

$$Az^2 + Bz + C = 0 \qquad (1)$$

trong đó A, B, C là những số phức, $(A \neq 0)$ đều có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau). Việc giải phương trình đó được tiến hành tương tự như trong trường hợp A, B, C là những số thực. Cụ thể là :

Xét biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$.

* Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$z_1 = \frac{-B+\delta}{2A},\quad z_2 = \frac{-B-\delta}{2A}$$

trong đó δ là một căn bậc hai của Δ.

* Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép

$$z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}.$$

Đặc biệt, khi Δ là số thực dương thì hai nghiệm của phương trình (1) là $z_1 = \dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$, $z_2 = \dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$; khi Δ là số thực âm thì hai nghiệm của phương trình (1) là $z_1 = \dfrac{-B+\sqrt{-\Delta}\,i}{2A}$, $z_2 = \dfrac{-B-\sqrt{-\Delta}\,i}{2A}$.

Ví dụ 3

a) Phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ có biệt thức $\Delta = -3$ nên nó có hai nghiệm phân biệt là $\dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

b) Phương trình $z^2 + (-2 + i)z - 2i = 0$ có biệt thức

$$\Delta = (-2 + i)^2 + 8i = 3 + 4i = (2 + i)^2$$

nên nó có hai nghiệm là

$$z_1 = \frac{1}{2}[2 - i + (2 + i)] = 2 \text{ và } z_2 = \frac{1}{2}[2 - i - (2 + i)] = -i.$$

H2 *Xét phương trình bậc hai*

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

trong đó A, B, C là những số thực, $A \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $z_0 \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của phương trình thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của nó.

CHÚ Ý

Trên đây, ta đã thấy mọi phương trình bậc hai (với hệ số phức) có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau). Hơn nữa, người ta còn chứng minh được rằng mọi phương trình bậc n

$$A_0z^n + A_1z^{n-1} + \ldots + A_{n-1}z + A_n = 0$$

(trong đó n là một số nguyên dương, A_0, A_1, ..., A_n là $n + 1$ số phức cho trước, $A_0 \neq 0$) luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

Tính chất quan trọng này của tập hợp các số phức là nội dung của một định lí gọi là *Định lí cơ bản của đại số.*

Câu hỏi và bài tập

17. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau :

$$-i \ ; \ 4i \ ; \ -4 \ ; \ 1 + 4\sqrt{3}i.$$

18. Chứng minh rằng nếu z là một căn bậc hai của số phức w thì $|z| = \sqrt{|w|}$.

19. Tìm nghiệm phức của các phương trình bậc hai sau :

a) $z^2 = z + 1$;

b) $z^2 + 2z + 5 = 0$;

c) $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$.

Chú ý : Có thể dùng máy tính bỏ túi để tìm nghiệm (gần đúng) của phương trình bậc hai với hệ số thực ngay cả khi nghiệm của nó không phải là số thực.

Chẳng hạn, dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx-500MS* để giải phương trình $x^2 - 6x + 58 = 0$ thì ấn

[MODE] [MODE] 1 [MODE] 2 (để vào chương trình giải phương trình bậc hai), ấn tiếp

1 [=] –6 [=] 58 (để đưa vào các hệ số của phương trình) ; ấn tiếp

[=] : trên màn hình hiện $x1 = 3$; ấn tiếp

[SHIFT] [Re ↔ Im] : trên màn hình hiện $x1 = 7._i$, (điều đó có nghĩa là nghiệm thứ nhất là $3 + 7i$) ; ấn tiếp

[=] : trên màn hình hiện $x2 = 3$; ấn tiếp

[SHIFT] [Re ↔ Im] : trên màn hình hiện $x2 = -7._i$, (điều đó có nghĩa là nghiệm thứ hai là $3 - 7i$).

(Thực ra, chỉ cần biết nghiệm thứ nhất là $3 + 7i$ thì đã suy ra ngay nghiệm thứ hai là $\overline{3 + 7i} = 3 - 7i$).

20. a) Hỏi công thức Vi-ét về phương trình bậc hai với hệ số thực có còn đúng cho phương trình bậc hai với hệ số phức không ? Vì sao ?

b) Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng $4 - i$ và tích của chúng bằng $5(1 - i)$.

c) Có phải mọi phương trình bậc hai $z^2 + Bz + C = 0$ (B, C là hai số phức) nhận hai nghiệm là hai số phức liên hợp không thực phải có các hệ số B, C là hai số thực ? Vì sao ? Điều ngược lại có đúng không ?

21. a) Giải phương trình sau :

$$(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0.$$

b) Tìm số phức B để phương trình bậc hai $z^2 + Bz + 3i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng 8.

22. *Đố vui.* Một học sinh kí hiệu một căn bậc hai của -1 là $\sqrt{-1}$ và tính $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ như sau :

a) Theo định nghĩa căn bậc hai của -1 thì $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$.

b) Theo tính chất của căn bậc hai (tích của hai căn bậc hai của hai số bằng căn bậc hai của tích hai số đó) thì

$$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Từ đó, học sinh đó suy ra $-1 = 1$.

Hãy tìm điều sai trong lập luận trên.



VÀI NÉT LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN SỐ PHỨC

Từ lâu, người ta đã biết công thức nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Hỏi có chăng công thức nghiệm của phương trình bậc ba

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0)$$

(chỉ dùng phép tính cộng, trừ, nhân, chia, lấy căn trên các hệ số) ?

Đến thế kỉ XVI, Các-đa-nô (G. Cardano, 1501 – 1576, người Ý) tìm ra một công thức như thế ; nhưng dù a, b, c, d là những số thực và chỉ nhằm tìm nghiệm thực, công thức vẫn đề cập đến số phức.



Girolamo Cardano
(1501 – 1576)

Chẳng hạn, với phương trình $x^3 + px + q = 0$ (p, q là hai số thực cho trước) thì công thức nghiệm có dạng

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Cụ thể là gọi δ là một căn bậc hai của $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, lấy u, v sao cho $u^3=-\frac{q}{2}+\delta$, $v^3=-\frac{q}{2}-\delta$ (mà $uv=-\frac{p}{3}$) thì $x=u+v$ là một nghiệm của $x^3+px+q=0$.

Nếu $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ thì ta gặp căn bậc hai δ của số thực âm nhưng kết quả $u+v$ có thể vẫn là số thực.

Ví dụ, với phương trình $x^3-15x-4=0$ thì $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-121$; lấy $\delta=11i$ thì $-\frac{q}{2}+\delta=2+11i=(2+i)^3$; $-\frac{q}{2}-\delta=2-11i=(2-i)^3$. Vậy lấy $u=2+i$, $v=2-i\left(uv=5=-\frac{p}{3}\right)$ thì $u+v=4$ là một nghiệm của phương trình $x^3-15x-4=0$.

Tuy công thức nghiệm phương trình bậc ba mang tên Các-đa-nô nhưng thực ra, Tác-ta-gli-a (N. Tartaglia, 1499 – 1557, người Ý) đã tìm được lời giải nhiều kiểu phương trình bậc ba và tiết lộ phương pháp giải cho Các-đa-nô. Nhờ đó Các-đa-nô tìm ra lời giải tổng quát và công bố nó vào năm 1545. Một học trò của Các-đa-nô là Fe-ra-ri (L. Ferrari, 1522 – 1565, người Ý) tìm ra cách giải phương trình bậc bốn bằng cách đưa về giải một phương trình bậc ba.

Việc các nhà toán học Ý táo bạo dùng các biểu thức chứa những số đang còn có vẻ bí ẩn (số ảo) để đến được kết quả thực dần dà cũng làm cho các nhà toán học chấp nhận sử dụng kí hiệu $a+b\sqrt{-1}$ (a, b là hai số thực) khi giải phương trình bậc hai, bậc ba, bậc bốn trong thế kỉ XVII.

Sang đầu thế kỉ XVIII, Moa-vrơ (A. De Moivre, 1667 – 1754, người Anh) tìm được mối liên quan giữa căn của số phức với lượng giác. Năm 1746, Đa-lăm-be (J. D'Alembert, 1717 – 1783, người Pháp) đưa ra chứng minh đầu tiên định lí cơ bản của đại số. Ơ-le (L. Euler, 1707 – 1783, người Thuỵ Sĩ) cũng nghiên cứu vấn đề này và chính Ơ-le đã dùng kí hiệu i để chỉ đơn vị ảo. Gau-xơ (C. Gauss, 1777 – 1855, người Đức) đưa ra chứng minh đầy đủ định lí cơ bản của đại số vào năm 1799.

Đến thế kỉ XIX, lí thuyết hàm số biến số phức được phát triển mạnh (những người đóng góp lớn là Cô-si (A.L. Cauchy, 1789 – 1857, người Pháp), Ri-man (B. Riemann, 1826 – 1866, người Đức), ...). Ngày nay số phức xuất hiện trong nhiều nghiên cứu toán học, vật lí, khoa học, kĩ thuật.

Luyện tập

23. Tìm nghiệm phức của phương trình $z + \frac{1}{z} = k$ trong các trường hợp sau :

a) $k = 1$; b) $k = \sqrt{2}$; c) $k = 2i$.

24. Giải các phương trình sau trên $\mathbb{C}$ (tức là tìm nghiệm phức của các phương trình đó) và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của mỗi phương trình (trong mặt phẳng phức) :

a) $z^3 + 1 = 0$; b) $z^4 - 1 = 0$;

c) $z^4 + 4 = 0$; d) $8z^4 + 8z^3 = z + 1$.

25. a) Tìm các số thực b, c để phương trình (với ẩn z)

$$z^2 + bz + c = 0$$

nhận $z = 1 + i$ làm một nghiệm.

b) Tìm các số thực a, b, c để phương trình (với ẩn z)

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

nhận $z = 1 + i$ làm nghiệm và cũng nhận $z = 2$ làm nghiệm.

26. a) Dùng công thức cộng trong lượng giác để chứng minh rằng với mọi số thực φ, ta có

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Từ đó hãy tìm mọi căn bậc hai của số phức $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$. Hãy so sánh cách giải này với cách giải trong bài học ở §2.

b) Tìm các căn bậc hai của $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ bằng hai cách nói ở câu a).

§ 3 DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

1. Số phức dưới dạng lượng giác

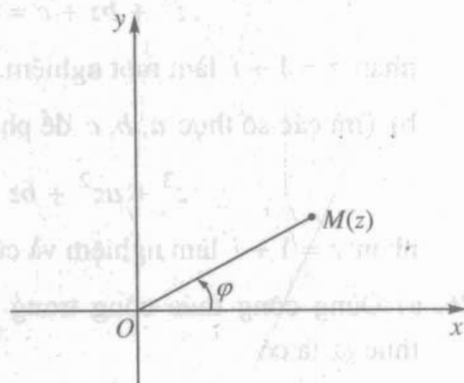
a) Acgumen của số phức $z \neq 0$

ĐỊNH NGHĨA 1

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là một **acgumen của** z.

CHÚ Ý

Nếu φ là một acgumen của z (h.4.5) thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (Người ta thường nói : Acgumen của $z \neq 0$ xác định sai khác $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).



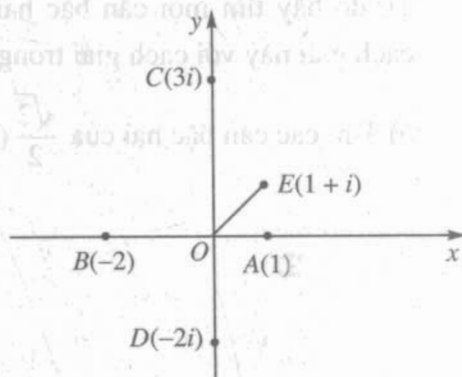
Hình 4.5

Ví dụ 1 (h.4.6).

a) Số thực dương tuỳ ý có một acgumen là 0.

b) Số thực âm tuỳ ý có một acgumen là π.

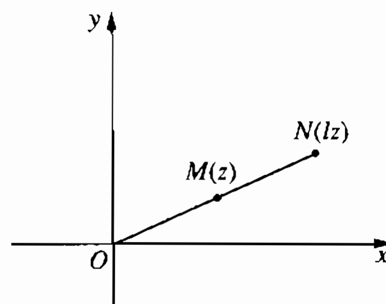
c) Các số $3i$, $-2i$ và $1 + i$ theo thứ tự có một acgumen là $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{4}$.



Hình 4.6

Nhận xét

Hai số phức z và lz (với $z \neq 0$ và l là số thực dương) có acgumen sai khác $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, vì các điểm biểu diễn của chúng cùng thuộc một tia gốc O (h.4.7).



Hình 4.7

H1 *Biết số phức $z \neq 0$ có một acgumen là φ. Hãy tìm một acgumen của mỗi số phức sau :*

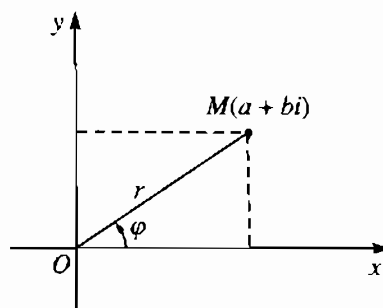
$$-z\ ;\ \bar{z}\ ;\ -\bar{z}\ ;\ \frac{1}{z}\ \text{(để ý rằng } \frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}}\bar{z}\text{)}.$$

b) Dạng lượng giác của số phức

Xét số phức $z = a + bi \neq 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Kí hiệu r là môđun của z và φ là một acgumen của z (h.4.8) thì dễ thấy rằng :

$$a = r\cos\varphi,\ \ b = r\sin\varphi.$$



Hình 4.8

Vậy $z = a + bi \neq 0$ có thể viết dưới dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Ta có

ĐỊNH NGHĨA 2

Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, trong đó $r > 0$, được gọi là **dạng lượng giác của số phức** $z \neq 0$. Còn dạng $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được gọi là *dạng đại số của số phức z.*

Nhận xét. Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ khác 0 cho trước, ta cần :

1) Tìm r : đó là môđun của z, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r đó cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

2) Tìm φ : đó là một acgumen của z ; φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \frac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM.

Ví dụ 2

a) Số 2 có môđun bằng 2, có một acgumen bằng 0 nên nó có dạng lượng giác $2(\cos 0 + i\sin 0)$;

b) Số -2 có môđun bằng 2, có một acgumen bằng π nên nó có dạng lượng giác $2(\cos\pi + i\sin\pi)$;

c) Số i có môđun bằng 1, có một acgumen bằng $\frac{\pi}{2}$ nên nó có dạng lượng giác $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

d) Số $1 + i$ có môđun bằng $\sqrt{2}$, có một acgumen bằng $\frac{\pi}{4}$ nên nó có dạng lượng giác $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

e) Số $1 - \sqrt{3}i$ có môđun bằng $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, có một acgumen là φ sao cho $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Lấy $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ thì

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

CHÚ Ý

1) $|z| = 1$ khi và chỉ khi $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

2) Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tuỳ ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$).

3) Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

Ví dụ 3

a) Số phức $-(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ có dạng lượng giác là

$$\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi).$$

b) Số phức $\cos\varphi - i\sin\varphi$ có dạng lượng giác là

$$\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi).$$

H2 *Cho $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$, tìm môđun và một acgumen của $\frac{1}{z}$, từ đó suy ra dạng lượng giác của $\frac{1}{z}$.*

2. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Ta đã biết công thức nhân và chia số phức dưới dạng đại số. Sau đây là định lí nêu lên công thức nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác ; chúng cho các quy tắc tính toán đơn giản về nhân và chia số phức.

ĐỊNH LÍ

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ $(r \geq 0, r' \geq 0)$,

thì $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$,

$\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)]$ (khi $r > 0$).

Nói một cách khác, để nhân các số phức dưới dạng lượng giác, ta lấy tích các môđun và tổng các acgumen ; để chia các số phức dưới dạng lượng giác ta lấy thương các môđun và hiệu các acgumen.

Chứng minh

$$zz' = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)][r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')]$$
$$= rr'[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')]$$
$$= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')].$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$. Theo công thức nhân số phức, ta có

$$\frac{z'}{z} = z'.\frac{1}{z} = \frac{r'}{r}[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)]. \qquad \square$$

Ví dụ 4. Ta có $\quad 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

và $\quad \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$,

nên $\quad \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Nhận xét. Nếu thực hiện phép chia trong ví dụ 4 dưới dạng đại số, ta được

$\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{1}{4}\left[1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i\right]$ nên từ kết quả trên suy ra

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

3. Công thức Moa-vrơ (Moivre) và ứng dụng

a) Công thức Moa-vrơ



A. De Moivre
(1667 – 1754)

Từ công thức nhân số phức dưới dạng lượng giác, bằng quy nạp toán học dễ dàng suy ra rằng với mọi số nguyên dương n,

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

và khi $r = 1$, ta có

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Cả hai công thức đó đều được gọi là *công thức Moa-vrơ.*

Ví dụ 5. $(1+i)^5 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5$

$$= (\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -4(1+i).$$

b) Ứng dụng vào lượng giác

Công thức khai triển luỹ thừa bậc ba của nhị thức $\cos\varphi + i\sin\varphi$ cho ta

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi(i\sin\varphi) + 3\cos\varphi(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Mặt khác, theo công thức Moa-vrơ,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Từ đó suy ra

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Tương tự, bằng cách đối chiếu công thức khai triển luỹ thừa bậc n của nhị thức $\cos\varphi + i\sin\varphi$ với công thức Moa-vrơ, có thể biểu diễn $\cos n\varphi$ và $\sin n\varphi$ theo các luỹ thừa của $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

c) Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Từ công thức Moa-vrơ, dễ thấy số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ có hai căn bậc hai là

$$\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$$

và $$-\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2} + \pi)\right).$$

Câu hỏi và bài tập

27. Hãy tìm dạng lượng giác của các số phức : $\overline{z}$; $-z$; $\frac{1}{\overline{z}}$; kz ($k \in \mathbb{R}^*$) trong mỗi trường hợp sau :

a) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$;

b) $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

28. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $1 - i\sqrt{3}$; $1 + i$; $(1 - i\sqrt{3})(1 + i)$; $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$;

b) $2i(\sqrt{3} - i)$;

c) $\frac{1}{2 + 2i}$;

d) $z = \sin\varphi + i\cos\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

Chú ý. Có thể dùng máy tính bỏ túi để chuyển đổi dạng đại số với dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$. Chẳng hạn, dùng máy tính bỏ túi CASIO fx – 500MS để :

1) Đổi từ dạng đại số $z = 1 + \sqrt{3}i$ thành dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì (đặt ở chế độ "rađian") ấn liên tiếp

Pol(	1	,	√	3	)	=	: trên màn hình hiện 2

(tức là $r = 2$) ; ấn tiếp

RCL	F	: trên màn hình hiện F = 1,047197551 (tức là $\varphi \approx \frac{\pi}{3}$).

2) Đổi từ dạng lượng giác $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ thành dạng đại số $z = a + bi$ thì (đặt ở chế độ "rađian") ấn liên tiếp

SHIFT	Rec(	2	,	SHIFT	π	÷	3	)	=

trên màn hình hiện 1 (tức $a = 1$) ; ấn tiếp

RCL	F	: trên màn hình hiện F = 1,732050808 (tức là $b \approx \sqrt{3}$).

29. Dùng công thức khai triển nhị thức Niu-tơn $(1 + i)^{19}$ và công thức Moa-vrơ để tính $C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$.

30. Gọi M, M' là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $z = 3 + i$, $z' = (3 - \sqrt{3}) + (1 + 3\sqrt{3})i$.

a) Tính $\frac{z'}{z}$.

b) Chứng minh rằng hiệu số acgumen của z' với acgumen của z là một số đo của góc lượng giác (OM, OM'). Tính số đo đó.

31. Cho các số phức $w = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ và $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

a) Chứng minh rằng $z_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_1 = z_0\varepsilon$, $z_2 = z_0\varepsilon^2$ là các nghiệm của phương trình $z^3 - w = 0$.

b) Biểu diễn hình học các số phức z_0, z_1, z_2.

Luyện tập

32. Sử dụng công thức Moa-vrơ để tính $\sin 4\varphi$ và $\cos 4\varphi$ theo các luỹ thừa của $\sin\varphi$ và $\cos\varphi$.

33. Tính

$$(\sqrt{3}-i)^6 \; ; \qquad \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} ; \qquad \left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21} .$$

34. Cho số phức $w = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. Tìm các số nguyên dương n để w^n là số thực.

Hỏi có chăng một số nguyên dương m để w^m là số ảo ?

35. Viết dạng lượng giác của số phức z và của các căn bậc hai của z cho mỗi trường hợp sau :

a) $|z| = 3$ và một acgumen của iz là $\frac{5\pi}{4}$;

b) $|z| = \frac{1}{3}$ và một acgumen của $\frac{\overline{z}}{1+i}$ là $-\frac{3\pi}{4}$.

36. Viết dạng lượng giác của các số phức sau :

a) $1 - i\tan\frac{\pi}{5}$; b) $\tan\frac{5\pi}{8} + i$;

c) $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}, \varphi \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$).

Bài đọc thêm

CĂN BẬC n CỦA SỐ PHỨC

Tương tự định nghĩa căn bậc hai của số phức, ta gọi số phức z sao cho $z^n = w$ là một **căn bậc n của số phức w** (n là số nguyên cho trước, $n > 1$).

Rõ ràng chỉ có một căn bậc n của $w = 0$ là 0.

Khi $w \neq 0$, ta viết w dưới dạng lượng giác $w = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $R > 0$. Ta cần tìm $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $(r > 0)$ sao cho $z^n = w$.

Theo công thức Moa-vrơ, $z^n = w$ có nghĩa là

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

tức là $r^n = R$ và $n\varphi = \alpha + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Từ đó $r = \sqrt[n]{R}$, $\varphi = \dfrac{\alpha + k2\pi}{n}$, tức là

$$z = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right].$$

Lấy $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, ta được n căn bậc n phân biệt của w.

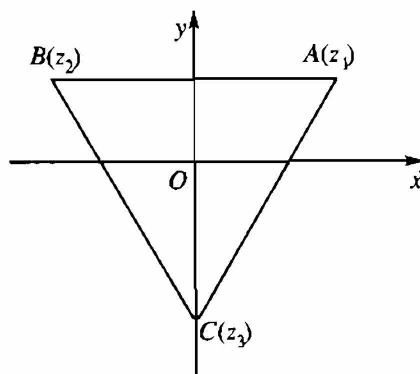
Ví dụ

Số $w = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ có ba căn bậc ba là

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i);$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i);$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = -i;$$



Hình 4.9

(trên hình 4.9 có ba điểm A, B, C theo thứ tự biểu diễn z_1, z_2, z_3).

Chú ý : Nếu $w \neq 0$ thì các căn bậc n ($n \geq 3$ cho trước) của w được biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi các đỉnh của một n-giác đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{|w|}$.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương IV

37. Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau :

a) $(2 - 3i)^3$;

b) $\dfrac{3 + 2i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{3 - 2i}$;

c) $(x + iy)^2 - 2(x + iy) + 5$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Với x, y nào thì số phức đó là số thực ?

38. Chứng minh rằng nếu $|z| = |w| = 1$ thì số

$$\frac{z + w}{1 + zw}$$

là số thực (giả sử $1 + zw \neq 0$).

39. Giải các phương trình sau trên $\mathbb{C}$:

a) $(z + 3 - i)^2 - 6(z + 3 - i) + 13 = 0$;

b) $\left(\frac{iz + 3}{z - 2i}\right)^2 - 3\frac{iz + 3}{z - 2i} - 4 = 0$;

c) $(z^2 + 1)^2 + (z + 3)^2 = 0$.

40. Xét các số phức

$$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}, \qquad z_2 = -2 - 2i, \qquad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

a) Viết z_1, z_2, z_3 dưới dạng lượng giác.

b) Từ câu a), hãy tính $\cos\frac{7\pi}{12}$ và $\sin\frac{7\pi}{12}$.

41. Cho $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

a) Viết z^2 dưới dạng đại số và dưới dạng lượng giác.

b) Từ câu a), hãy suy ra dạng lượng giác của z.

42. a) Bằng cách biểu diễn hình học các số phức $2 + i$ và $3 + i$, hãy chứng minh rằng nếu $\tan a = \frac{1}{2}$, $\tan b = \frac{1}{3}$ với $a, b \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $a + b = \frac{\pi}{4}$.

b) Bằng cách biểu diễn hình học các số phức $2 + i$, $5 + i$ và $8 + i$, hãy chứng minh rằng nếu $\tan a = \frac{1}{2}$, $\tan b = \frac{1}{5}$, $\tan c = \frac{1}{8}$ với $a, b, c \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $a + b + c = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập trắc nghiệm khách quan

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

43. Phần thực của $z = 2i$ là

(A) 2 ; (B) $2i$; (C) 0 ; (D) 1.

44. Phần ảo của $z = -2i$ là

(A) –2 ; (B) $-2i$; (C) 0 ; (D) –1.

45. Số $z + \overline{z}$ là

(A) số thực ; (B) số ảo ; (C) 0 ; (D) 2.

46. Số $z - \overline{z}$ là :

(A) số thực ; (B) số ảo ; (C) 0 ; (D) $2i$.

47. Số $\frac{1}{1+i}$ bằng

(A) $1 + i$; (B) $\frac{1}{2}(1 - i)$; (C) $1 - i$; (D) i.

48. Tập hợp các nghiệm của phương trình $z = \frac{z}{z+i}$ là

(A) $\{0 ; 1 - i\}$; (B) $\{0\}$; (C) $\{1 - i\}$; (D) $\{0, 1\}$.

49. Môđun của $1 - 2i$ bằng

(A) 3 ; (B) $\sqrt{5}$; (C) 2 ; (D) 1.

50. Môđun của $-2iz$ bằng

(A) $-2|z|$; (B) $\sqrt{2}z$; (C) $2|z|$; (D) 2.

51. Acgumen của $-1 + i$ bằng

(A) $\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; (B) $-\frac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(C) $\frac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; (D) $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

52. Nếu acgumen của z bằng $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì

(A) Phần ảo của z là số dương và phần thực của z bằng 0 ;

(B) Phần ảo của z là số âm và phần thực của z bằng 0 ;

(C) Phần thực của z là số âm và phần ảo của z bằng 0 ;

(D) Phần thực và phần ảo của z đều là số âm.

53. Nếu $z = \cos\varphi - i\sin\varphi$ thì acgumen của z bằng

(A) $\varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(B) $-\varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(C) $\varphi + \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(D) $\varphi + \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

54. Nếu $z = -\sin\varphi - i\cos\varphi$ thì acgumen của z bằng

(A) $-\frac{\pi}{2} + \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(B) $-\frac{\pi}{2} - \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(C) $\frac{\pi}{2} + \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(D) $\pi - \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm

I – BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. a) Chứng minh rằng hàm số $f(x) = e^x - x - 1$ đồng biến trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$.

b) Từ đó, suy ra $e^x > x + 1$ với mọi $x > 0$.

2. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 10$.

b) Chứng minh rằng phương trình $2x^3 - 3x^2 - 12x - 10 = 0$ có nghiệm thực duy nhất.

c) Gọi nghiệm thực duy nhất của phương trình là α. Chứng minh rằng $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.

3. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \ln x$ và (D) là một tiếp tuyến bất kì của (C). Chứng minh rằng trên khoảng $(0 ; +\infty)$, (C) nằm ở phía dưới của đường thẳng (D).

4. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho n máy chạy trong một giờ là $10(6n + 10)$ nghìn đồng.

Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy để được lãi nhiều nhất ?

5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 6}}$ trên đoạn $[0 ; 1]$.

6. a) Cho $P(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$ và hai số a, b thoả mãn $a + b = 1$. Hãy tính $P(a) + P(b)$.

b) Hãy so sánh $A = \sqrt[3]{18}$ và $B = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$.

7. a) Chứng minh rằng nếu a và b là hai số dương thoả mãn $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_7 \dfrac{a + b}{3} = \dfrac{1}{2}\left(\log_7 a + \log_7 b\right)$.

b) Biết a và b là hai số dương, $a \neq 1$ sao cho $\log_a b = \sqrt{3}$. Hãy tính $\log_{a\sqrt{b}} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3}}$.

8. a) Tìm đạo hàm của các hàm số $y = \cos x.\ e^{2\tan x}$ và $y = \log_2(\sin x)$.

b) Chứng minh rằng hàm số $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ thoả mãn hệ thức $y''' - 13y' - 12y = 0$.

9. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2^x$, $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ và $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ. Hãy nêu nhận xét về vị trí tương đối của ba đồ thị đó.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_3 x$. Từ đó hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = 2 + \log_3 x$ và đồ thị của hàm số $y = \log_3(x + 2)$.

10. Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$;

b) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3\log_{\frac{1}{2}} x + 5\right) = 2$;

c) $4^{\log x+1} - 6^{\log x} - 2.3^{\log x^2+2} = 0$;

d) $\begin{cases} 2^x 8^{-y} = 2\sqrt{2}, \\ \log_9 \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\log_3(9y). \end{cases}$

11. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)]$;

b) $y = \sqrt{\log_{0,5}(-x^2 + x + 6)} + \dfrac{1}{x^2 + 2x}$.

12. Tìm nguyên hàm của mỗi hàm số sau :

a) $y = x^3(1 + x^4)^3$; b) $y = \cos x \sin 2x$; c) $y = \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

13. Tìm hàm số f, biết rằng $f'(x) = 8\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right)$ và $f(0) = 8$.

14. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$; b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$; c) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$.

15. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y + x^2 = 0$ và $y + 3x^2 = 2$;

b) $y^2 - 4x = 4$ và $4x - y = 16$.

16. a) Cho hình thang cong A giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo được khi quay A quanh trục hoành.

b) Cho hình phẳng B giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $y = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay B quanh trục tung.

17. Cho các số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2i$. Hãy tính và biểu diễn hình học các số phức :

$$z_1^2 \; ; \; z_1 z_2 \; ; \; 2z_1 - z_2 \; ; \; z_1\overline{z_2} \text{ và } \frac{z_2}{z_1}.$$

18. Tính :

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)^2-\left(\sqrt{3}-i\right)^2$;

b) $\left(\sqrt{3}+i\right)^2+\left(\sqrt{3}-i\right)^2$;

c) $\left(\sqrt{3}+i\right)^3-\left(\sqrt{3}-i\right)^3$;

d) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)^2}$.

19. a) Xác định phần thực của số phức $\dfrac{z+1}{z-1}$, biết rằng $|z|=1$ và $z \neq 1$.

b) Chứng minh rằng nếu $\dfrac{z+1}{z-1}$ là số ảo thì $|z|=1$.

20. Xác định tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $(1+i\sqrt{3})z+2$, trong đó $|z-1|\leq 2$.

21. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức :

$-8+6i$; $3+4i$ và $1-2\sqrt{2}\,i$.

22. Giải các phương trình sau trên $\mathbb{C}$:

a) $z^2-3z+3+i=0$;

b) $z^2-(\cos\varphi+i\sin\varphi)z+i\sin\varphi\cos\varphi=0$,

trong đó φ là số thực cho trước.

23. Tính $\left(\dfrac{4i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$ và $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{11}}$.

II – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

24. Hàm số $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1}$

(A) Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty\,;\,1)$ và $(3\,;\,+\infty)$;

(B) Nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty\,;\,1)$ và $(3\,;\,+\infty)$;

(C) Đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(3 ; +\infty)$;

(D) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(3 ; +\infty)$.

25. Hàm số $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ có giá trị nhỏ nhất là

(A) $-\frac{1}{2}$; (B) 0 ; (C) -1 ; (D) $-\frac{1}{3}$.

26. Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x}$. Khi đó

(A) Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$ (khi $x \to +\infty$) ;

(B) Đường thẳng $y = x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$ (khi $x \to +\infty$) ;

(C) Đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$ (khi $x \to +\infty$) ;

(D) Đồ thị $(\mathscr{C})$ không có tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$).

27. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 1$ tiếp xúc tại điểm $(1 ; 1)$ với

(A) Parabol $y = 2x^2 - 1$; (B) Parabol $y = x^2$;

(C) Parabol $y = -x^2 + 2x$; (D) Đường thẳng $y = 2x + 1$.

28. Cho hai số dương a và b. Đặt $X = \ln\frac{a+b}{2}$ và $Y = \frac{\ln a + \ln b}{2}$. Khi đó

(A) $X > Y$; (B) $X < Y$;

(C) $X \geq Y$; (D) $X \leq Y$.

29. Cho hai số không âm a và b. Đặt $X = e^{\frac{a+b}{2}}$ và $Y = \frac{e^a + e^b}{2}$. Khi đó

(A) $X > Y$; (B) $X < Y$;

(C) $X \geq Y$; (D) $X \leq Y$.

30. Cho $(\mathscr{G})$ là đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$. Ta có thể suy ra đồ thị của hàm số $y = \log_2 2(x + 3)$ bằng cách tịnh tiến $(\mathscr{G})$ theo vectơ

(A) $\vec{v} = (3 ; 1)$; (B) $\vec{v} = (3 ; -1)$;

(C) $\vec{v} = (-3 ; 1)$ (D) $\vec{v} = (-3 ; -1)$.

31. Cho hàm số $f(x) = \log_5(x^2 + 1)$. Khi đó

(A) $f'(1) = \frac{1}{2\ln 5}$;

(B) $f'(1) = \frac{1}{\ln 5}$;

(C) $f'(1) = \frac{3}{2\ln 5}$;

(D) $f'(1) = \frac{2}{\ln 5}$.

32. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = a^x$ và đồ thị của hàm số $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $(\sqrt{2^{-1}}\ ;\ \sqrt{2})$. Khi đó

(A) $a > 1$ và $b > 1$;

(B) $a > 1$ và $0 < b < 1$;

(C) $0 < a < 1$ và $b > 1$;

(D) $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$.

33. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khi đó

(A) $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$;

(B) $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$;

(C) $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x^3 - \frac{3}{x} + C$;

(D) $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C$.

34. Đẳng thức

$$\int_0^a \cos(x + a^2)\mathrm{d}x = \sin a$$

Xảy ra nếu

(A) $a = \pi$;

(B) $a = \sqrt{\pi}$;

(C) $a = \sqrt{3\pi}$;

(D) $a = \sqrt{2\pi}$.

35. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thoả mãn điều kiện

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln\frac{k}{x}\mathrm{d}x < \mathrm{e} - 2.$$

Khi đó

(A) $S = \{1\}$;

(B) $S = \{2\}$;

(C) $S = \{1\ ;\ 2\}$;

(D) $S = \varnothing$.

36. Cho số phức z tuỳ ý. Xét các số phức $\alpha = z^2 + (\overline{z})^2$ và $\beta = z\overline{z} + i(z - \overline{z})$. Khi đó

(A) α là số thực, β là số thực ;
(B) α là số thực, β là số ảo ;
(C) α là số ảo, β là số thực ;
(D) α là số ảo, β là số ảo.

37. Cho số phức tuỳ ý $z \neq 1$. Xét các số phức

$$\alpha = \frac{i^{2005} - i}{\overline{z} - 1} - z^2 + (\overline{z})^2 \text{ và } \beta = \frac{z^3 - z}{z - 1} + (\overline{z})^2 + \overline{z}.$$

Khi đó

(A) α là số thực, β là số thực ;
(B) α là số thực, β là số ảo ;
(C) α là số ảo, β là số thực ;
(D) α là số ảo, β là số ảo.

38. Nếu môđun của số phức z bằng r ($r > 0$) thì môđun của số phức $(1 - i)^2 z$ bằng

(A) $4r$;
(B) $2r$;
(C) $r\sqrt{2}$;
(D) r.

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP

CHƯƠNG I

4. $a \le 0$. **5.** $-2 \le a \le 2$. **10.** a) 18000 người và 22000 người ; b) $f'(t) = \dfrac{120}{(t+5)^2}$, $t > 0$;

c) • Năm 1990 : 0,192 ; • Năm 2008 : 0,065 ; • Năm 1996. **11.** a) $y_{CĐ} = f(-3) = -1$;

$y_{CT} = f(-1) = -\dfrac{7}{3}$; b) Hàm số không có cực trị ; c) $y_{CĐ} = f(-1) = -2$; $y_{CT} = f(1) = 2$;

d) $y_{CĐ} = f(-1) = 1$; $y_{CT} = f(0) = 0$;

e) $y_{CĐ} = f(-1) = 2\dfrac{2}{15}$; $y_{CT} = f(1) = 1\dfrac{13}{15}$;

f) $y_{CĐ} = f(0) = -3$; $y_{CT} = f(2) = 1$.

12. a) $y_{CT} = y(-\sqrt{2}) = -2$; $y_{CĐ} = y(\sqrt{2}) = 2$;

b) $y_{CĐ} = y(0) = 2\sqrt{2}$;

c) $y_{CĐ} = y\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi$;

$y_{CT} = y\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi$;

d) $y_{CT} = y(k\pi) = 2(1 - \cos k\pi)$;

$y_{CĐ} = y\left(\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = 4\dfrac{1}{2}$.

13. $a = -2$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 0$. **14.** $a = 3$, $b = 0$, $c = -4$. **16.** $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

17. a) ; $\max\limits_{x\in[-2;3]} f(x) = 10$; $\min\limits_{x\in[-2;3]} f(x) = -6$;

b) $\max\limits_{x\in[-4;0]} f(x) = -4$; $\min\limits_{x\in[-4;0]} f(x) = -5\dfrac{1}{3}$;

c) $\min\limits_{x>0} f(x) = 2$; d) $\max\limits_{x\in[2;4]} f(x) = 4$;

$\min\limits_{x\in[2;4]} f(x) = -4$; e) $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = 3\dfrac{2}{3}$;

$\min\limits_{x\in[0;1]} f(x) = 2$; f) $\max\limits_{x\in[0;2]} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

18. a) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 3$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = -\dfrac{3}{2}$;

b) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 5\dfrac{1}{16}$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 3\dfrac{1}{2}$.

19. $BM = \dfrac{a}{4}$. Khi đó diện tích hình chữ nhật là $S = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2$. **20.** $n = 12$ (con cá).

21. a) $y_{CT} = f(-1) = -\dfrac{1}{2}$; $y_{CĐ} = f(1) = \dfrac{1}{2}$;

b) $y_{CT} = f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 6\dfrac{3}{4}$; c) $y_{CĐ} = f(0) = \sqrt{5}$;

d) Hàm số không có cực trị. **22.** $m > 0$.

23. 20mg ; độ giảm huyết áp nhiều nhất là 100.

24. $M(-1 ; 1)$; $AM = \sqrt{5}$. **25.** 9 km/h.

26. a) 375 người/ngày ; b) ngày thứ 15 ; 675 người/ngày ; c) Từ ngày thứ 11 đến ngày thứ 19 ; d) Hàm số f đồng biến trên $[0 ; 25]$.

27. a) $\max\limits_{x\in[-3;1]} \sqrt{3-2x} = 3$; $\min\limits_{x\in[-3;1]} \sqrt{3-2x} = 1$;

b) $\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}$; $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -2$;

c) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 3$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{11}{4}$;

d) $\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

28. Hình vuông có cạnh dài 10 cm.

29. a) $I\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{8}\right)$; $\begin{cases} x = X + \frac{3}{4} \\ y = Y - \frac{1}{8} \end{cases}$; $Y = 2X^2$;

b) $I\left(1;-\frac{7}{2}\right)$; $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - \frac{7}{2} \end{cases}$; $Y = \frac{1}{2}X^2$;

c) $I\left(\frac{1}{8};\frac{1}{16}\right)$; $\begin{cases} x = X + \frac{1}{8} \\ y = Y + \frac{1}{16} \end{cases}$; $Y = -4X^2$;

d) $I(0;-5)$; $\begin{cases} x = X \\ y = Y - 5 \end{cases}$; $Y = 2X^2$.

30. a) $I(1;-1)$; b) $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$; $Y = X^3 - 3X$;

c) $y = -3x + 2$. **31.** $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 2 \end{cases}$; $Y = -\frac{1}{X}$;

32. a) $I(1;1)$; b) $I(-1;3)$.

33. $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$; $Y = aX + \frac{c}{X}$.

34. a) Tiệm cận đứng : $x = -\frac{2}{3}$; tiệm cận ngang: $y = \frac{1}{3}$; b) $x = -3$; $y = -2$; c) Tiệm cận xiên : $y = x + 2$; tiệm cận đứng : $x = 3$;

d) Tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$; tiệm cận xiên: $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{4}$; e) $x = 1$; $x = -1$; $y = 0$; f) $x = -1$; $y = 0$. **35.** a) Tiệm cận đứng : $x = 0$; tiệm cận xiên : $y = x - 3$; b) $x = 0$; $x = 2$; $y = x + 2$;

c) $x = 1$, $x = -1$, $y = x$; d) $x = -1$; $x = \frac{3}{5}$; $y = -\frac{1}{5}$; **36.** a) $y = x$ (khi $x \to +\infty$), $y = -x$ (khi $x \to -\infty$) ; b) $y = 3x$ (khi $x \to +\infty$), $y = x$ (khi $x \to -\infty$) ; c) $y = 2x$ (khi $x \to +\infty$) ; $y = 0$ (khi $x \to -\infty$) ;

d) $y = x + \frac{1}{2}$ (khi $x \to +\infty$),

$y = -x - \frac{1}{2}$ (khi $x \to -\infty$).

37. a) $y = 2x$ (khi $x \to +\infty$) ;
$y = 0$ (khi $x \to -\infty$) ;

b) $y = x - 2$ (khi $x \to +\infty$) ;
$y = -x + 2$ (khi $x \to -\infty$) ;

c) $y = x$ (khi $x \to +\infty$) ;
$y = -x$ (khi $x \to -\infty$) ;

d) $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$.

38. a) $x = 3$; $y = x + 1$; b) $I(3;4)$, $\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 4; \end{cases}$

c) $Y = X + \frac{5}{X}$. **39.** a) $I(-2;-3)$; $Y = X - \frac{2}{X}$;

b) $I(5;2)$; $Y = X + \frac{4}{X}$. **40.** b) $y = -3x - 5$.

41. b) • $m < -1$ hoặc $m > 3$: 1 nghiệm ;
• $m = -1$ hoặc $m = 3$: 2 nghiệm ;
• $-1 < m < 3$: 3 nghiệm.

43. c) $y = \frac{8}{3\sqrt{3}}x - \frac{7}{3}$ và $y = -\frac{8}{3\sqrt{3}}x - \frac{7}{3}$.

45. b) • $m < -2$ hoặc $m > 2$: 1 nghiệm
• $m = -2$ hoặc $m = 2$: 2 nghiệm ;
• $-2 < m < 2$: 3 nghiệm.

46. a) $m < -1$, $2 < m < 3$, $m > 3$. **48.** a) $m > 0$;

b) $y = -\frac{4}{3\sqrt{6}}x + \frac{13}{12}$ và $y = \frac{4}{3\sqrt{6}}x + \frac{13}{12}$.

53. b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$; c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$.

54. b) Đồ thị của hàm số $y = -1 + \frac{1}{x+1}$ là hình đối xứng của $(\mathcal{H})$ qua trục hoành.

55. b) $y = 3(x - 2)$. **56.** b) Giữ nguyên phần của $(\mathscr{C})$ nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần của $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

57. b) Hai giao điểm : $A(0\,;1)$, $B\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$;

c) Đường thẳng $y = 1$ là tiếp tuyến chung của ($\mathscr{C}$) và ($\mathscr{P}$) tại A ; phương trình tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) và ($\mathscr{P}$) tại B, theo thứ tự, là $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ và $y = -2x + \frac{1}{2}$; d) Trên $\left(-\infty\,; -\frac{1}{2}\right)$ ($\mathscr{C}$) nằm phía dưới ($\mathscr{P}$) ; trên $\left(-\frac{1}{2}\,; 0\right)$ và $(0\,; +\infty)$ ($\mathscr{C}$) nằm phía trên ($\mathscr{P}$).

58. b) • $m < 0$ hoặc $m > 12$; • $m < 0$.

60. $O(0\,;0)$; $y = \frac{3}{2}x$.

61. Tiếp điểm : $\left(\frac{v_0^2}{g\tan\alpha}\,; \frac{v_0^2}{2g}(1-\cot^2\alpha)\right)$.

63. c) $m < -3$ hoặc $-3 < m < 0$.

64. a) $a = -2$; $b = -3$.

65. b) $m < 4 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m > 4 + 2\sqrt{6}$;

c) Phần của đường thẳng $y = 5x - 2$, với $x < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x > 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$. **66.** $a = -6$; $b = \frac{9}{2}$.

67. 1° a) $T(x) = 0{,}0001x^2 + 0{,}2x + 10000$;

b) $M(x) = 0{,}0001x + \frac{10000}{x} + 0{,}2$; $x = 10000$ (cuốn) ; 2°. b) $573 < x < 17427$; c) 9000 (cuốn) ; 71 triệu đồng. **70.** $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

71. Độ dài hai cạnh còn lại đều là 5cm.

73. a) $p < 0$. **74.** b) $y = -3x + 1$; c) $m > -3$.

75. b) $m = 9$, $m = \frac{1}{9}$.

78. b) Giao điểm của ($\mathscr{P}$) và ($\mathscr{H}$) là A(0 ; 1) ; c) Trên $(-\infty\,; -1)$ và $(0\,; +\infty)$, ($\mathscr{P}$) nằm phía trên ($\mathscr{H}$) ; trên $(-1\,; 0)$, ($\mathscr{P}$) nằm phía dưới ($\mathscr{H}$).

80. (B) **81.** (C) **82.** (D) **83.** (D) **84.** (A) **85.** (C) **86.** (B) **87.** (A) **88.** (C) **89.** (D) **90.** (B) **91.** (C) **92.** (A) **93.** (D) **94.** (B) **95.** (C) **96.** (B) **97.** (D) **98.** (A) **99.** (C) **100.** (D).

CHƯƠNG II

1. a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai.

2. Điều kiện C. **3.** 2 ; 36 ; $\frac{25}{16}$; $\frac{12}{5}$.

4. a) $-\frac{80}{27}$; b) $\frac{116}{16}$; c) 12 ; d) 10.

5. a) ab ; b) $2a$.

6. a) $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$; b) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > \sqrt[3]{63}$;

c) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < \sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

7. *HD* : $7 \pm 5\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^3$.

8. a) $\sqrt[4]{b}$; b) $2\sqrt[3]{ab}$; c) 1; d) $\sqrt{a}$.

10. a) *HD* : $4 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} \pm 1)^2$;

b) $9 \pm \sqrt{80} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$.

11. a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$; b) $3^{600} > 5^{400}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = \sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$; d) $7^{30} > 4^{40}$. **12.** Điều kiện B. **13.** Điều kiện C. **14.** Điều kiện $0 < a < 1$.

15. $\frac{1}{16}$; 4 ; 3. **16.** a ; a. **17.** ≈ 21,59 triệu đồng

18. a) $x^{\frac{7}{12}}$; b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-2}{15}}$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; d) $a^{\frac{1}{4}}$.

19. a) a^3 ; b) a^2 ; c) $\dfrac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}}$; d) $\left|x^{\pi}-y^{\pi}\right|$.

20. a) Khi $a \neq 1$ thì $\alpha = 0$; khi $a = 1$ thì α tuỳ ý ; b) $-3 < \alpha < 3$. **21.** a) $x = 1$; b) $x = 1$ và $x = 16$.

22. a) $|x| < \sqrt[4]{3}$; b) $x \geq \sqrt[11]{7}$; c) $\left[\begin{array}{l} x > \sqrt[10]{2} \\ x < -\sqrt[10]{2}; \end{array}\right.$

d) $x \leq \sqrt[3]{5}$. **23.** Khẳng định d).

24. a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai.

25. a) $\log_a x + \log_a y$; $a > 0, a \neq 1,$

$x > 0, y > 0$; b) $\log_a \dfrac{x}{y}$; $a > 0, a \neq 1, x > 0,$

$y > 0$; c) $\alpha \log_a x$; $a > 0, a \neq 1, x > 0$;

d) b ; $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

26. a) $a > 1$; b) $0 < a < 1$.

27. 1 ; 4 ; 0 ; −2 ; $\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{3}{2}$. **28.** −3 ; 1 ; 3 ; −2.

29. 18 ; 32 ; $\dfrac{1}{125}$; 32. **30.** a) $x = 625$; b) $x = -3$; c) $x = 25$; d) $x = 5{,}5$. **31.** 1,65 ; 1,29 ; −0,13 ; −0,42. **32.** a) $\dfrac{4}{3}$; b) −2 ; c) $\dfrac{1}{2}$; d) 3.

33. a) $\log_3 4 > \log_4 \dfrac{1}{3}$; b) $3^{\log_6 1{,}1} > 7^{\log_6 0{,}99}$.

34 . a) $\log 2 + \log 3 > \log 5$;

b) $\log 12 - \log 5 < \log 7$;

c) $3\log 2 + \log 3 < 2\log 5$;

d) $1 + 2\log 3 > \log 27$.

35. a) 8 ; b) 11.

36. a) $x = a^4 b^7$; b) $x = a^2 . b^{-3}$.

37. a) $2\alpha + 2\beta - 2$; b) $2\alpha + \dfrac{1}{2}$.

38. a) 0 ; b) $\log 18\sqrt{2}$;

c) $20\log 2 - \dfrac{5}{2}\log 3$; d) $\log \dfrac{3}{16}$.

39. a) $x = 3$; b) $x = 7$; c) $x = 5^{-\frac{1}{8}}$.

40. M_{31} có 10 chữ số ; M_{127} có 39 chữ số ; $M_{1398269}$ có 420921 chữ số.

41. 4 năm 2 quý. **42.** Sai từ $\ln(2e) = \ln e + \ln e$.

43. $2a + 3b$; $4a - 2b$; $2b - 2a$; $-2a - 2b$.

45. 900 con ; 3 giờ 9 phút.

46. ≈ 82 235 năm.

47. a) $a \approx 863\,188\,841{,}4$; b) ≈ 52,5 mmHg.

48. a) $-3e^2$; b) −3. **49.** a) $y' = (2x-1)e^{2x}$;

b) $y' = \dfrac{2x\left[(x+1)e^{4x}+1\right]}{\sqrt{e^{4x}+1}}$;

c) $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$; d) $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

50. a) Đồng biến ; b) Nghịch biến.

52. Ta có bảng sau

STT	Loại âm thanh	$\dfrac{I}{I_0}$	độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	0 dB
2	Nhạc êm dịu	4000	36 dB
3	Nhạc mạnh phát ra từ loa	$6{,}8\times10^8$	88 dB
4	Tiếng máy bay phản lực	$2{,}3\times10^{12}$	124 dB
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	130 dB

53. a) 3 ; b) 0.

54. a) $y' = 3\ln^2 x + \dfrac{2(3x-2)\ln x}{x}$;

b) $y' = \dfrac{x\ln x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x}$;

c) $y' = \ln\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}$;

d) $y' = \dfrac{2}{x^2+1} - \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

55. a) Nghịch biến ; b) Đồng biến.

57. (C_1) là đồ thị hàm số $y = x^{-2}$;

(C_2) là đồ thị hàm số $y = x^{-\frac{1}{2}}$;

58. a) $y' = 2\pi(2x+1)^{\pi-1}$; b) $y' = \dfrac{3}{5x\sqrt[5]{\ln^2 5x}}$.

c) $y' = \dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

d) $y' = \left(\dfrac{x}{b}\right)^a \left(\dfrac{a}{x}\right)^b \dfrac{a-b}{x}$.

59. a) $\approx 0{,}91$; b) $\approx -2{,}61$.

61. a) $0 < x < 1$; b) $2 < x \le 8$.

62. a) $x \le 0$; b) $x > 2$.

63. a) $x = -\dfrac{1}{2}$. *Gợi ý* : $2 - \sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}$;

b) $x \in \{0 ; 3\}$; c) $x = 1$; d) $x = 0$.

64. a) $x \in \{-1 ; 2\}$. b) $x = 2$. **65.** a) $k = 53$;

$a \approx 1{,}096$; b) $d \approx 25{,}119\log F - 43{,}312$.

c)

F	53	60	80	100	120	140	160
d	0	1,35	4,49	6,93	8,91	10,60	12

66. a) $x = 2$; b) $x = 6$.

67. a) $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$; b) $x = 9$.

68. a) $S = \{2 ; \log_3 2 - 1\}$; b) $x = 0$.

69. a) $S = \{10 ; \sqrt[9]{10}\}$; b) $S = \left\{2 ; \dfrac{1}{16}\right\}$;

c) $S = \{3^{-3} ; 3^{-0{,}8}\}$

70. a) $x = \log_{\frac{4}{3}}\left(\log_3 4\right)$; b) $x = 3^{-1}$;

c) $S = \{2 ; -(1+\log_3 2)\}$; d) $S = \left\{5^{-1} ; \sqrt[6]{5}\right\}$.

71. a) $x = 1$; b) $x = 2$.

72. a) $S = \{(2;18) ; (18;2)\}$;

b) $(x ; y) = \left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$. **73.** a) $(x ; y) = (-2 ; 7)$;

b) $(x ; y) = \left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$. **74.** a) $x = -1$; b) $x = 0$;

c) $x = 100$; d) $x = 0$.

75. a) $S = \{\log_3 28 ; \log_3 82 - 4\}$;

b) $S = \left\{\dfrac{5}{4} ; 3\right\}$; c) $S = \{-2^{25} ; -1\}$;

d) $x = 4^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{\sqrt{3}}}$. **76.** a) $x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\dfrac{3}{2}$;

b) $x = e^{-2}$; c) $S = \{2 ; 16\}$; d) $S = \{2^{-7} ; 2\}$.

77. a) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; b) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$. *Gợi ý* : Đặt $t = 4^{1+\cos 2x}$. **78.** a) $x = -1$; b) $x = 2$.

79. a) $(x ; y) = (-2 ; 0)$; b) $(x ; y) = (2 ; 5)$.

80. a) $x < 0{,}5$; b) $x > -\dfrac{3}{4}$.

81. a) $\dfrac{1}{3} < x < 2$; b) $\dfrac{1}{5} < x < \dfrac{2}{5}$;

c) $S = [1 ; 2) \cup (3 ; 4]$; d) $\dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{1}{2}$.

82. a) $0{,}5 \le x \le 4$; b) $S = (0 ; 1)$;

83 a) $S = (-\sqrt{5} ; -2) \cup (1 ; \sqrt{5})$;

b) $S=\left[\frac{1}{2};1\right)$; **84.** a) $p<q$; b) $p>q$; c) $p>q$; d) $q>p$. **85.** *Hướng dẫn :*

$$1+\frac{1}{4}\left(2^{x}-2^{-x}\right)^{2}=\frac{1}{4}\left(2^{x}+2^{-x}\right)^{2}.$$

86. a) $2^{10}=1024$; b) $\frac{173}{60}$; c) $-n$.

87. *Hướng dẫn :*

$$\sqrt{\log_3 2.\log_3 4}<\frac{1}{2}\left(\log_3 2+\log_3 4\right).$$

90. $S_{OAB}=\frac{1}{\ln^2 2}\approx 2{,}081$. **91.** a) $a>1$;

b) $0<a<1$; c) $a>1$; d) $0<a<1$.

92. $t\approx 3574$ (năm). **93.** a) $x=10$; b) $x=-2$; c) $x=1{,}5$; d) $x\in\{-1{,}5\ ;-1\}$.

94. a) $x\in\left\{\frac{1}{16};2\right\}$; b) $x=1$; c) $x=13$; d) $x=3$. **95.** $x=1$.

96. a) $(x\ ;y)=(6\ ;2)$; b) $(x\ ;y)=(512\ ;1)$.

97. a) $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$;

b) $(-\infty\ ;0]\cup[\log_6 5\ ;1)$; c) $(4\ ;+\infty)$.

98. (C) **99.** (D). **100** (B). **101.** (B).

102. (C) **103.** (C) **104.** (D)

105. (C). **106.** (D) **107.** (A)

108. (B) **109.** (C) **110.** (B).

CHƯƠNG III

1. a) $x^3+\frac{x^2}{4}+C$; b) $\frac{x^4}{2}-\frac{5x^2}{2}+7x+C$;

c) $\frac{-1}{x}-\frac{x^3}{3}-\frac{x}{3}+C$; d) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$;

e) $\frac{10^{2x}}{2\ln 10}+C$. **2.** a) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$;

b) $2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$; c) $2x-\sin 2x+C$;

d) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}+C$. **3** (C). **4.** Đúng vì $-\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của $f(x)$. **5.** a) $-6(1-x^3)^{\frac{1}{2}}+C$;

b) $\frac{2}{5}\sqrt{5x+4}+C$; c) $-\frac{2}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{4}}+C$;

d) $-\frac{2}{1+\sqrt{x}}+C$.

6. a) $-2x\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}+C$;

b) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$;

c) xe^x-e^x+C ; d) $\frac{1}{4}x^4\ln(2x)-\frac{x^4}{16}+C$

7. a) $-\frac{1}{3}(7-3x^2)^{\frac{3}{2}}+C$. *HD :* Đổi biến $u=7-3x^2$; b) $\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$.

HD : Đổi biến $u=3x+4$; c) $\frac{1}{3}\tan(3x+2)+C$.

HD : Đổi biến $u=3x+2$; d) $\frac{1}{2}\sin^6\left(\frac{x}{3}\right)+C$.

HD : Đổi biến $u=\sin\frac{x}{3}$.

8. a) $\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^6+C$. *HD :* Đổi biến $u=\frac{x^3}{18}-1$;

b) $-\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{2}+C$.

HD : Đổi biến $u=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$;

c) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$,

d) $\frac{2}{3}(\sqrt{3x-9}\,e^{\sqrt{3x-9}}-e^{\sqrt{3x-9}})+C$.

HD : Đổi biến $u=\sqrt{3x-9}$.

9. a)

$\frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$;

b) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C$; c) $\frac{1}{5}\sin^5 x + C$;

d) $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$. **10.** a) 21 ; b) 2,5 ; c) $\frac{9\pi}{2}$.

11. a) 10 ; b) –12 ; c) –2 ; d) 16.

12. 4. **14.** a) $\frac{3\pi}{4} - 1$; b) 1280 m.

15. $\frac{4300}{3}$ m. **16.** b) $\frac{625}{9,8} \approx 63,78$ (m).

17. a) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. *HD* : Đổi biến $u = x + 1$;

b) $\frac{1}{2}$. *HD* : Đổi biến $u = \tan x$;

c) $\frac{15}{16}$. *HD* : Đổi biến $u = 1 + t^4$;

d) $\frac{1}{8}$. *HD* : Đổi biến $u = 4 + x^2$;

e) 4. *HD* : Đổi biến $u = 1 + x^2$;

f) $\frac{1}{6}$. *HD* : Đổi biến $u = 1 - \cos 3x$.

18. a) $\frac{32}{3}\ln 2 - \frac{7}{4}$; b) e ; c) $-\frac{1 + e^{\pi}}{2}$;

d) $\frac{\pi}{2} - 1$.

19. a) $I = \int_0^3 \sqrt{u}\,du = 2\sqrt{3}$; b) $\frac{\pi}{8}$.

HD : a) Đổi biến $u = t^5 + 2t$.

20. a) $I = \int_1^9 \frac{5}{4}u^{\frac{1}{4}}\,du = 9^{\frac{5}{4}} - 1$; b) $\frac{4}{3}$.

HD : a) Đổi biến $u = 5 - 4\cos t$.

21. (*B*) **22.** a) *HD* : Đổi biến $u = 1 - x$.

23. a) –3 ; b) 3.

24. a) $\frac{e^8 - e}{3}$. *HD* : Đổi biến $u = x^3$;

b) $I = \int_0^{\ln 3} u^2\,du = \frac{(\ln 3)^3}{3}$.

HD : Đổi biến $u = \ln x$;

c) $I = \int_1^4 \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{7}{3}$.

HD : Đổi biến $u = 1 + x^2$;

d) $I = \int_0^3 \frac{1}{9}e^u\,du = \frac{e^3 - 1}{9}$.

HD : Đổi biến $u = 3x^3$. e) $\ln 2$.

25. a) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$; b) $I = \int_0^{\ln 2} u\,du = \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

HD : Đổi biến $u = \ln(2 - x)$; c) $\frac{\pi^2}{4} - 2$;

d) $I = \int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1)$. *HD* : Đổi biến $u = x^3 + 1$; e) $\frac{2e^3 + 1}{9}$. **26.** $\frac{7\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

27. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\frac{64}{15}$. **28.** a) $\frac{11}{3}$; b) 9 ;

c) 44. **29.** $\frac{16}{3}$. **30.** $2\sqrt{3}$. **31.** $\frac{7\pi}{6}$. **32.** 3π.

33. 2π. **34.** a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{38}{15}$; c) $\frac{16}{3}$. **35.** a) $4\frac{1}{2}$;

b) $\frac{17}{4}$; c) $\frac{22}{3}$. **36.** 8. **37.** $\frac{32\pi}{5}$. **38.** $\frac{\pi(\pi + 2)}{8}$.

39. $\pi(e - 2)$.

40. 2π. **41.** a) $x^2 + \frac{2}{x} + C$;

b) $4x^2 - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$; c) $-\frac{2}{3}\cos(x^{\frac{3}{2}} + 1) + C$.

HD : Đổi biến $u = x^{\frac{3}{2}} + 1$; d) $\frac{1}{2\cos(2x+1)} + C$.

HD : Đổi biến $u = \cos(2x + 1)$.

42. a) $-\sin\left(\frac{1}{x} - 1\right) + C$.

HD : Đổi biến $u = \frac{1}{x} - 1$;

b) $\frac{(x^4+1)^4}{16} + C$. HD : Đổi biến $u = x^4 + 1$;

c) $\frac{xe^{2x}}{6} - \frac{e^{2x}}{12} + C$; d) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

43. a) $-e^{-x}(x+1) + C$; b) $\frac{(\ln x)^2}{2} + C$.

HD : Đổi biến $u = \ln x$.

44. $f(x) = \frac{(3x^2-1)^4}{2} - 5$. **45.** $b = 1$. **46.** a) 2 ; b) 9 ; c) –2 ; d) –6. **48.** $\frac{125}{6}$ m. **49.** 24 m/s.

50. a) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$; b) 9 ; c) $\frac{e^3-1}{2}$. **51.** a) $\frac{9}{2}$; b) $\frac{56}{15}$. **52.** a) 9 ; b) $\frac{9}{4}$. **53.** 4π.

54. 3π. **55.** π. **56.** 3π. **57.** a) 8π ; b) $\frac{32\pi}{5}$.

58. πe^2 **59.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{4\pi}{7}$. **60.** (B) **61.** (B) **62.** (D) **63.** (A) **64.** (B). **65.** (A) **66.** (A) **67.** (C).

CHƯƠNG IV

3. $\pm i$, $\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

4. $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$; $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-2 - 3i$; $\frac{16}{17} - \frac{13}{17}i$.

5. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 1 ; 0.

9. a) Đường tròn tâm I (biểu diễn số i) bán kính 1 ; b) Trục thực ; c) Đường trung trực đoạn thẳng nối O với điểm A biểu diễn số $3 + 4i$.

11. Thực ; Ảo ; Ảo. **12.** a) Trục ảo trừ điểm gốc ; b) Hợp hai đường phân giác của góc giữa trục thực, trục ảo ; c) Hợp trục thực và trục ảo ; d) Trục ảo bỏ điểm I (biểu diễn số i).

13. a) $1 + 2i$; b) $-\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$; c) $\frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$; d) $-i, -3i, 2 + 3i$; e) $\pm 2i$.

14. a) $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$, $\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}$;

b) Trục ảo bỏ đoạn thẳng nối I, J (I biểu diễn i, J biểu diễn $-i$) ;

16. $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = |z'|$;

17. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$; $\pm\sqrt{2}(1+i)$; $\pm 2i$; $\pm(2+\sqrt{3}i)$. **19.** a) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; b) $-1 \pm 2i$; c) $2i$; $-1 + i$.

20. b) $3 + i$, $1 - 2i$. **21.** a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, i ; b) $B = \pm(3+i)$.

23. a) $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; c) $(1 \pm \sqrt{2})i$.

24. a) -1, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$; b) ± 1, $\pm i$;

c) $\pm(1-i)$, $\pm(1+i)$; d) -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}$.

25. a) $b = -2$, $c = 2$; b) $a = -4$, $b = 6$, $c = -4$.

26. b) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$$= \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

27. a) $|kz| = |k|r$, acgumen của kz là φ nếu $k > 0$ và là $\varphi + \pi$ nếu $k < 0$ (sai khác $2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$).

28. d) $\sin\varphi + i\cos\varphi$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

29. $-2^9 = -512$. **30.** a) $1 + \sqrt{3}i$; b) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

32. $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$;

$\sin 4\varphi = 4(\cos^3\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi)$.

33. -2^6 ; $\frac{-1}{2^{1002}}$; 2^{21}.

34. n là bội nguyên dương của 3, không có m.

35. a) $3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

$\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

và $\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$.

b) $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

và $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

36. a) $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$;

b) $\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{8}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$.

c) $2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

nếu $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$;

$\left(-2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

nếu $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$.

37. a) -46 và -9 ; b) $\frac{23}{26}$ và $\frac{63}{26}$;

c) $y = 0$ hoặc $x = 1$.

39. a) $3i$; $-i$; b) $\frac{-1 + 5i}{2}$, $\frac{4 + 35i}{17}$;

c) $1 \pm 2i$, $-1 \pm i$.

40. b) $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

41. a) $8(\sqrt{3} + i) = 16\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

b) $4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. **43.** (C) **44.** (A)

45. (A) **46.** (B) **47.** (B) **48.** (A) **49.** (B)

50. (C) **51.** (A) **52.** (B) **53.** (B) **54.** (B).

ÔN TẬP CUỐI NĂM

2. c) $f(3,5)f(3,6) < 0 \Rightarrow 3,5 < \alpha < 3,6$.

4. 5 máy.

5. $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x) = \frac{2}{5}$.

6. a) 1 ; b) $A > B$. **7.** b) $\frac{31 - 20\sqrt{3}}{3}$.

8. a) $y' = e^{2\tan x}\left(\frac{2}{\cos x} - \sin x\right)$; $y' = \frac{\cot x}{\ln 2}$.

10. a) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$;

b) $S = \left\{\frac{1}{16} ; 2\right\}$; c) $x = 10^{-2}$;

d) $S = \left\{\left(2 ; \frac{1}{6}\right)\right\}$. **11.** a) $2 < x < 3$;

b) $S = \left(-2 ; \frac{1 - \sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{21}}{2} ; 3\right)$.

12. a) $\dfrac{(1+x^4)^4}{16}+C$; b) $\dfrac{-3\cos x-\cos 3x}{6}+C$;

c) $\ln|\cos x|+x\tan x+C$.

13. $f(x)=4x-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+9$.

14. a) $\dfrac{\pi}{4}$. *HD* : Đổi biến $x=\tan t$;

b) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$. *HD* : Đổi biến $t=\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$; c) e – 2.

15. a) $\dfrac{8}{3}$; b) $\dfrac{243}{8}$. **16.** a) $\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$; b) $\dfrac{\pi}{2}$.

17. $2i$; $3-i$; $1+4i$; $-1+3i$; $\dfrac{3-i}{2}$.

18. a) $4i\sqrt{3}$; b) 4 ; c) $16i$; d) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

20. Hình tròn tâm A bán kính 4 (A biểu diễn số $3+i\sqrt{3}$).

21. $\pm(1+3i)$; $\pm(2+i)$; $\pm(\sqrt{2}-i)$.

22. a) $1+i$, $2-i$; b) $\cos\varphi$, $i\sin\varphi$.

23. -64 ; $\dfrac{i}{64}$.

24. (A) **25.** (C) **26.** (B) **27.** (B) **28.** (C) **29.** (D) **30.** (C) **31.** (B) **32.** (B) **33.** (A) **34.** (D) **35.** (C) **36.** (A) **37.** (C) **38.** (B).

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **TRẦN HỮU NAM – NGUYỄN NGỌC TÚ**
Biên tập tái bản : **NGUYỄN NGỌC TÚ**
Biên tập kĩ – mĩ thuật : **ĐINH XUÂN DUNG**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **NGUYỄN NGỌC TÚ**
Chế bản : **CÔNG TY CỔ PHẦN THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

GIẢI TÍCH 12 - NÂNG CAO

Mã số : NH201T0

In 100.000 cuốn (ST), khổ 17 x 24 cm.
In tại Công ty Cổ phần In Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. Số in: 77. Số xuất bản: 01-2010/CXB/758-1485/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2010.





SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12

1. TOÁN HỌC
   - GIẢI TÍCH 12
   - HÌNH HỌC 12
2. VẬT LÍ 12
3. HOÁ HỌC 12
4. SINH HỌC 12
5. NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai)
6. LỊCH SỬ 12
7. ĐỊA LÍ 12
8. TIN HỌC 12
9. CÔNG NGHỆ 12
10. GIÁO DỤC CÔNG DÂN 12
11. GIÁO DỤC QUỐC PHÒNG - AN NINH 12
12. NGOẠI NGỮ
    - TIẾNG ANH 12 • TIẾNG PHÁP 12
    - TIẾNG NGA 12 • TIẾNG TRUNG QUỐC 12

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12 - NÂNG CAO

Ban Khoa học Tự nhiên :
- TOÁN HỌC (GIẢI TÍCH 12, HÌNH HỌC 12)
- VẬT LÍ 12 • HOÁ HỌC 12 • SINH HỌC 12

Ban Khoa học Xã hội và Nhân văn :
- NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai)
- LỊCH SỬ 12 • ĐỊA LÍ 12
- NGOẠI NGỮ (TIẾNG ANH 12, TIẾNG PHÁP 12, TIẾNG NGA 12, TIẾNG TRUNG QUỐC 12)





Giá: 9.400đ